Classicité de formes modulaires surconvergentes sur une variété de Shimura

Stéphane Bijakowski

Université Paris 13 - Paris Nord

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : **Mathématiques**

préparée au laboratoire **LAGA**

dans le cadre de l'École Doctorale **Galilée**

présentée et soutenue publiquement
par

Stéphane BIJAKOWSKI

le 12 décembre 2014

Titre :

Classicité de formes modulaires surconvergentes sur une variété de Shimura

Directeur de thèse: **Pascal BOYER**
Co-directeur de thèse: **Benoît STROH**

Jury

M. Pascal BOYER,	Directeur de thèse
M. Christophe BREUIL,	Examinateur
M. Kevin BUZZARD,	Rapporteur absent à la soutenance
M. Gaëtan CHENEVIER,	Examinateur
M. Laurent FARGUES,	Rapporteur
M. Vincent PILLONI,	Examinateur
M. Benoît STROH,	Co-directeur de thèse

Résumé

Nous nous intéressons aux formes modulaires surconvergentes définies sur certaines variétés de Shimura, et prouvons des théorèmes de classicité en grand poids. Dans un premier temps, nous étudions les variétés ayant bonne réduction, associées à des groupes non ramifiés en p. Nous nous intéressons aux variétés de Shimura PEL de type (A) et (C), qui sont associées respectivement à des groupes unitaires et symplectiques. Pour démontrer un théorème de classicité, nous utilisons la méthode du prolongement analytique, qui a été développée par Buzzard et Kassaei dans le cas de la courbe modulaire.
Nous généralisons ensuite ce résultat de classicité à des variétés en ne supposant plus que le groupe associé est non ramifié en p. Dans le cas des formes modulaires de Hilbert, nous construisons des modèles entiers des compactifications de la variété, et démontrons un principe de Koecher. Pour des variétés de Shimura plus générales, nous travaillons avec le modèle rationnel de la variété, et utilisons un plongement vers une variété de Siegel pour définir les structures entières.

Abstract

We deal with overconvergent modular forms défined on some Shimura varieties, and prove classicality results in the case of big weight. First we study the case of varieties with good reduction, associated to unramified groups in p. We deal with Shimura varieties of PEL type (A) and (C), which are associated respectively to unitary and symplectic groups. To prove a classicality theorem, we use the analytic continuation method, which has been developed by Buzzard and Kassaei in the case of the modular curve.
We then generalize this classicality result for varieties without assuming that the associated group is unramified in p. In the case of Hilbert modular forms, we construct integral models of compactifications of the variety, and prove a Koecher principle. For more general Shimura varieties, we work with the rationnal model of the variety, and use an embedding to a Siegel variety to define the integral structures.

Remerciements

Je souhaite remercier profondément mon directeur de thèse Benoît Stroh, pour m'avoir encadré tout au long de ma thèse. Son expertise, sa patience et toutes ses remarques m'ont été précieux dans l'élaboration de ce travail. Je voudrais également remercier mon co-directeur de thèse Pascal Boyer pour ses remarques et conseils.

Je suis reconnaissant envers toute l'équipe de Géométrie arithmétique de Paris 13 pour son dynamisme et les nombreux séminaires et groupes de travail organisés, et notamment le directeur de l'équipe, Jacques Tilouine. Je remercie également Kevin Buzzard, qui m'a accueilli pour un séjour à l'Imperial College, ainsi que ses étudiants pour leur hospitalité. Les discussions et échanges avec d'autres chercheurs et étudiants m'ont beaucoup apporté ; je voudrais notamment remercier Vincent Pilloni, Yichao Tian, Jack Thorne, Julien Hauseux, Valentin Hernandez, Giovanni Rosso. Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive.

Je remercie les rapporteurs, Kevin Buzzard et Laurent Fargues, pour la lecture de mon travail et leurs commentaires. Je remercie également Christophe Breuil, Gaëtan Chenevier et Vincent Pilloni d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Pouvoir assister à des conférences en France et à l'étranger étant très important, je remercie l'ANR Arshifo, qui m'a permis de voyager. Je remercie également le Corps des Mines de m'avoir accompagné dans mon projet. Je n'oublie pas les secrétaires du laboratoire, dont le travail peu visible est néanmoins très important.

Je voudrais remercier ma famille pour leurs encouragements. Merci enfin à ma femme Christine pour son amour et son soutien.

Table des matières

Introduction

Coleman ([Co]) a prouvé qu'une forme modulaire surconvergente sur la courbe modulaire, de niveau Iwahorique en p, de poids k entier, propre pour un certain opérateur de Hecke U_p, était classique si la pente, c'est-à-dire la valuation de la valeur propre pour l'opérateur de Hecke (normalisée de telle façon que $v(p) = 1$), était inférieure strictement à $k-1$. Ce résultat a été obtenu grâce à une connaissance approfondie de la cohomologie rigide de la courbe modulaire. Des travaux de Buzzard ([Bu]) et de Kassaei ([Ka]), utilisant des techniques de prolongement analytique, ont donné une nouvelle démonstration de ce théorème. Détaillons le principe de leur démonstration. La géométrie de la courbe modulaire en niveau Iwahorique sur $\mathbb{F}_p$ est assez simple : il y a le lieu ordinaire-multiplicatif, où la courbe elliptique est ordinaire et le sous-groupe de la p-torsion est de type multiplicatif ; le lieu ordinaire-étale, où la courbe elliptique est ordinaire et le sous-groupe de la p-torsion est de type étale ; et le lieu supersingulier, où la courbe elliptique est supersingulière. La fonction la plus pertinente pour étudier la courbe modulaire de niveau Iwahorique sur $\mathbb{Q}_p$ est la fonction degré de Fargues : le degré du sous-groupe universel vaut 1 sur le tube du lieu ordinaire-multiplicatif, 0 sur le tube du lieu ordinaire-étale, et est un rationnel compris entre 0 et 1 sur le tube du lieu supersingulier. Une forme modulaire surconvergente étant définie sur un voisinage strict du lieu ordinaire-multiplicatif, il faut étendre cette forme aux deux autres lieux. Sur le lieu supersingulier, l'opérateur U_p accumule les points dans un voisinage du lieu ordinaire-multiplicatif (plus précisément, il augmente strictement la fonction degré sur ce lieu).

Si f est une forme modulaire surconvergente de valeur propre non nulle, Buzzard a remarqué que la relation $f = a_p^{-1} U_p f$ pouvait s'interpréter comme une équation fonctionnelle vérifiée par f. Puisque l'opérateur U_p contracte le tube supersingulier vers le lieu ordinaire-multiplicatif, l'élément de droite dans l'équation a un domaine de définition plus grand que le domaine de définition initial de la forme modulaire surconvergente. Cette relation permet donc d'étendre la forme modulaire au lieu supersingulier. Ce n'est plus le cas sur le lieu ordinaire-étale : dans ce cas l'opérateur U_p envoie $p-1$ points dans le lieu ordinaire-multiplicatif, et 1 point sur le lieu ordinaire-étale. L'opérateur U_p^n envoie lui $p^n - 1$ points dans le lieu ordinaire-multiplicatif, et 1 point dans le lieu ordinaire-étale. Kassaei a cependant remarqué que sous une certaine condition, il était possible de négliger le point du lieu ordinaire-étale. Plus précisément, si f est une forme classique propre pour U_p, alors sur le lieu ordinaire-étale, pour tout n on peut écrire $f = a_p^{-n} U_p^n f = f_n + g_n$, où f_n est définie à l'aide des $p^n - 1$ points de U_p^n appartenant au lieu ordinaire-multiplicatif, et g_n à l'aide de l'unique point du lieu ordinaire-étale. Si le poids de la forme modulaire est suffisamment grand devant la pente (plus précisément si $k > 1 + v(a_p)$), alors les fonctions g_n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui justifie le fait de négliger le point du lieu ordinaire-étale. Si maintenant f est une forme surconvergente, alors la fonction g_n n'est pas définie, mais la fonction f_n l'est, puisqu'elle n'est définie qu'à l'aide de points du lieu ordinaire-multiplicatif. Kassaei a ensuite su recoller les fonctions f_n avec la forme f initiale pour produire une forme modulaire classique. L'étape de recollement est une étape technique, qui utilise le sous-groupe canonique (pour définir la série f_n sur un voisinage strict du lieu ordinaire-étale), et un résultat d'annulation de la cohomologie de Bartenwerfer ([Ba]), qui permet de donner un sens à la limite des f_n.

La première généralisation de ces résultats est alors dûe à Sasaki ([Sa]) dans le cas des variétés de Hilbert avec p totalement décomposé dans le corps totalement réel. Dans ce cas, il y a autant d'opérateurs de Hecke que de places au-dessus de p, et le prolongement analytique se fait direction par direction. Pour être plus précis, le fait que la forme modulaire soit propre pour le premier opérateur de Hecke permet de l'étendre à une première zone. En itérant ce processus pour chaque opérateur de Hecke, on finit par étendre la forme modulaire à toute la variété, et donc on montre qu'elle est classique. D'une manière générale, cette démonstration montre que pour prouver un théorème de classicité par la méthode du prolongement analytique, on peut se ramener au cas où il n'y a qu'une place au-dessus de p.

La méthode précédente étant géométrique, c'est-à-dire qu'elle repose principalement sur la dynamique de l'opérateur de Hecke, il est naturel d'essayer de généraliser cette preuve pour d'autres variétés. La première extension de ce résultat pour des variétés de dimension supérieure a été obtenue par Pilloni pour les variétés de Siegel de genre 2 (voir [Pi]). L'espace de niveau Iwahorique considéré paramètre les schémas abéliens A avec polarisation principale munis d'un drapeau $H_1 \subset H_2$ de la p-torsion, chaque H_i étant de rang p^i et totalement isotrope. Les quantités pertinentes à étudier ici sont les degrés de H_1 et de H_2. La première chose à faire est de comprendre la dynamique de l'opérateur de Hecke U_p. Rappelons que l'opérateur géométrique U_p associe à un point $x = (A, H_1, H_2)$ les points $(A/L, H_1', H_2')$, où L est un supplémentaire générique totalement isotrope de H_2 dans $A[p]$. On trouve alors que cet opérateur augmente le degré de H_2, et l'augmente strictement si celui-ci n'est pas entier. Si f est une forme surconvergente, propre pour U_p et de valeur propre non nulle, il est donc possible par le même argument que précédemment d'étendre f au lieu $\deg H_2 > 1$. La zone restante est donc le lieu $\deg H_2 \leq 1$; la situation est donc beaucoup plus compliquée que précédemment. En effet, dans le cas de la courbe modulaire, le lieu restant était $\deg H = 0$, qui correspond au lieu ordinaire-étale, et il était possible d'analyser précisément l'action de U_p sur ce lieu, car le lieu ordinaire est bien connu. En revanche, dans notre cas, la relation $\deg H_2 \leq 1$ n'implique pas que le schéma abélien est ordinaire en p. Le lieu ordinaire correspond au lieu où les degrés de H_2 et H_1 sont entiers. Il y a alors 4 possibilités, car les degrés de H_1 et H_2 sont alors égaux à 0 ou 1 : le lieu $\deg H_2 = 2$ correspond au lieu ordinaire-multiplicatif, le lieu $\deg H_2 = 0$ correspond au lieu ordinaire-étale. Les lieux où le couple $(\deg H_1, \deg H_2)$ vaut $(1, 1)$ et

$(0,1)$ sont les lieux multiplicatif-étale et étale-multiplicatif respectivement.

Sur chacun des deux lieux précédents, il est possible de construire des séries comme celles introduites par Kassaei. En effet, l'opérateur U_p envoie p^3-p points vers le lieu ordinaire-multiplicatif, et p points dans le lieu d'origine. Cette distinction est faite suivant le fait que le supplémentaire de H_2 rencontre ou non le sous-groupe canonique. Si le poids de la forme modulaire est suffisamment grand, il est donc possible d'étendre la forme f aux deux lieux précédents. La dynamique sur le lieu ordinaire-étale est également bien connue : l'opérateur U_p envoie p^3-p^2 points dans le lieu ordinaire-multiplicatif, p^2-1 points dans l'union des deux lieux précédents, et 1 point dans le lieu ordinaire-étale. Cette distinction est faite suivant le rang de l'intersection du supplémentaire de H_2 avec le sous-groupe canonique. La dynamique de U_p étant connue, il est donc possible de définir des séries de Kassaei, et de les faire converger sous une certaine hypothèse vérifiée par le poids. Sous cette hypothèse, la forme f a été étendue au lieu ordinaire, c'est-à-dire où le p-rang de la p-torsion du schéma abélien est 2, ainsi qu'au lieu $\deg H_2 > 1$. On peut également contrôler en partie la dynamique sur le lieu où le p-rang de la p-torsion du schéma abélien est 1. En effet, il est possible de construire des séries de Kassaei sur ce lieu. Considérons par exemple le lieu $\deg H_1 = 0$, $\deg H_2 \in]0,1[$. Il existe sur ce lieu un sous-groupe canonique partiel de rang p. On peut alors décomposer l'opérateur de Hecke suivant que le supplémentaire rencontre ou non ce sous-groupe canonique partiel. Si ce n'est pas le cas, le point est dans la zone $\deg H_2 > 1$ où f est déjà définie, sinon il est dans la zone d'origine. Il est donc possible de construire des séries de Kassaei sur ces lieux, et donc d'étendre f à ces lieux si le poids est suffisamment grand. Au final f a été étendue à une zone assez grande de la variété, et on peut se demander si cela est suffisant. Par un lemme de Nakayama topologique, il suffit d'étendre la forme f au tube d'un ouvert suffisament grand de la fibre spéciale. Celle-ci est munie des stratifications de Kottwitz-Rapoport et de Ekedahl-Oort, et une analyse fine de ces stratifications prouve qu'il est possible d'étendre la forme modulaire au tube d'un ouvert suffisamment grand de la fibre spéciale (plus précisément au tube d'un ouvert de complémentaire de codimension plus grande que 2). En résumé, pour prouver que f est classique, il suffit d'étendre la forme modulaire surconvergente sur un lieu suffisamment grand de la variété considérée. Sur chacun des lieux, soit l'extension était automatique (l'opérateur U_p a son image incluse dans un lieu de définition de f), soit il est possible de construire des séries de Kassaei à l'aide du sous-groupe canonique, ou du sous-groupe canonique partiel.

La méthode précédente a été généralisée par Pilloni et Stroh ([P-S 2]) dans le cas des variétés de Shimura PEL de type (A) ou (C) associée à un groupe déployé sur $\mathbb{Q}_p$. Cette condition implique que le nombre premier p est totalement décomposé dans le corps CM ou totalement réel associé à la variété de Shimura. La méthode de démonstration est analogue à celle des variétés de Siegel de genre 2 : elle repose sur la dynamique des opérateurs de Hecke, la construction de séries de Kassaei à l'aide de sous-groupes canoniques, et enfin sur la géométrie de la fibre spéciale de la variété. Pour comprendre celle-ci, les auteurs utilisent les strates de Kottwitz-Rapoport dans le cas (A), et des intersections de strates de Kottwitz-Rapoport et Ekedahl-Oort dans le cas (C). Pour montrer que la forme modulaire f est classique, il suffit de montrer qu'elle s'étend au tube d'un ouvert de la fibre spéciale, dont le complémentaire est de codimension plus grande que 2. Pour appliquer le résultat d'extension automatique, il est également important d'utiliser la normalité de la fibre spéciale (voir [P-S 2, 5.1.5] pour plus de détails).

Pour généraliser encore ces résultats, on peut considérer des variétés munies d'une action d'un corps totalement réel dans lequel le nombre premier p n'est pas totalement décomposé. Le cas le plus simple est celui des variétés de Hilbert associée à un corps totalement réel dans lequel p est inerte (qui est de difficulté équivalente au cas p non ramifié, car le nombre de places au-dessus de p n'apporte pas de difficultés). Remarquons que contrairement au cas totalement décomposé, il n'y a qu'un seul opérateur de Hecke en p, U_p, ce qui complique la situation. Il est toujours possible de construire les séries de Kassaei sur le lieu ordinaire. Néanmoins, chercher des zones d'extension automatique pour ensuite appliquer un théorème d'extension en codimension plus grande que 2 se révèle compliqué (Tian arrive cependant à certains résultats dans [Ti]). Pour espérer obtenir des résultats généralisables, il est important de supprimer si possible l'étape d'extension en codimension plus grande que 2, c'est-à-dire réellement prolonger la forme modulaire surconvergente à toute la variété rigide. C'est ce qui a été fait par Pilloni et Stroh dans [P-S 1] dans le cas des variétés de Hilbert. Rappelons que la variété de Hilbert de niveau Iwahorique paramètre un schéma abélien A polarisé muni d'une action de l'anneau des entiers d'un corps totalement réel F et un sous-groupe H de $A[p]$ de hauteur d, où d est le degré de F (on suppose p inerte dans F). Dans ce cas, H est un groupe de Raynaud (voir [Ray]), muni d'une action de O_F/p, on peut définir les degrés partiels de H. Ils seront définis ultérieurement, mais précisons simplement qu'il y a autant de degrés partiels que de plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, et que leur somme est égale au degré défini par Fargues. On sait déjà que l'opérateur U_p augmente le degré total, et l'augmente même strictement si le degré n'est pas entier. En réalité, il augmente certaines combinaisons linéaires des fonctions degrés, et si le degré total n'augmente pas, alors chacun des degrés partiels est entier.

Nous avons donc une information plus précise sur les zones où il y a potentiellement des problèmes : il s'agit de zones où chacun des degrés partiels vaut soit 0 soit 1. Bien sûr, le lieu où tous les degrés partiels valent 1 (resp. 0) correspond au lieu ordinaire-multiplicatif (resp. ordinaire étale). De plus, si on considère un point x avec tous ses degrés partiels entiers (mais pas dans le lieu ordinaire-multiplicatif) deux possibilités existent : soit aucun point de $U_p(x)$ n'a le même degré que x, soit il n'en existe qu'un seul. Cela veut donc dire qu'il n'existe qu'au plus un seul « mauvais » supplémentaire de H (si x correspond à un couple (A, H)) ; celui-ci va donc jouer le rôle du sous-groupe canonique. Finalement, sur les zones où la dynamique de l'opérateur de Hecke ne permet pas d'étendre le domaine de définition de la forme modulaire, il est possible de construire des séries analogues à celles de Kassaei. En effet, supposons que l'on a étendu f à la zone où le degré est strictement supérieur à un entier r, et soit x un point de degré r avec tous les degrés partiels entiers. Si $U_p(x)$ a tous ses points de degré strictement supérieur à r, alors on peut définir $U_p f$ en x. Sinon, il n'existe qu'un seul point de $U_p(x)$ de degré r. On peut alors décomposer l'opérateur U_p en $U_p = U_p^{good} + U_p^{bad}$, où U_p^{good} correspond aux points de degré strictement supérieur à r et U_p^{bad} à l'unique point de degré r. La série de Kassaei à l'ordre 1 est alors égale à $a_p^{-1}U_p^{good}f$, qui est bien défini, puisque l'opérateur U_p^{good} a son image incluse dans le domaine de définition de f. Pour définir la série de Kassaei à l'ordre 2, il faut distinguer suivant que $U_p^{bad}(x)$ est dans une bonne ou une mauvaise zone, c'est-à-dire si $U_p(U_p^{bad}(x))$ a 0 ou 1 point de degré égal à r. La série de Kassaei à l'ordre 2 est égale à $a_p^{-2}U_p^2 f$ dans le premier cas, et à $a_p^{-1}U_p^{good}f + a_p^{-2}U_p^{bad}U_p^{good}f$ dans le deuxième. Les séries ainsi construites vont converger, ce qui permet d'étendre f à la zone de degré r.

Cependant, cela n'est pas suffisant, car pour pouvoir utiliser la dynamique de l'opérateur de Hecke sur la zone où le degré est dans $]r-1,r[$, il faut pour cela que f soit définie sur la zone où le degré est plus grand que $r-\alpha$, pour un certain α strictement positif. Pour cela, il est important de faire surconverger les décompositions précédentes et les séries construites, de manière à ne pas ensuite être bloqué dans le prolongement analytique. C'est ce qui est fait dans [P-S 1], à l'aide notamment de l'étude des sous-groupes de la p-torsion des schémas abéliens considérés. A l'aide d'arguments combinatoires, les auteurs prouvent que si x est un point de la variété, et si $U_p(x)$ possède un point de degré proche de celui de x, alors les degrés des autres points de $U_p(x)$ sont connus, et ne sont pas proches de celui du point x. Cela prouve donc que si un « mauvais »point de $U_p(x)$ existe (dans le sens où son degré est proche de celui de x), alors il est unique, ce qui permet donc de décomposer l'opérateur U_p en ce point.

Cette démonstration est importante car elle montre qu'il est possible de se passer du résultat d'extension automatique en codimension plus grande que 2. Pour attaquer des variétés plus générales que celles déjà traitées, par exemple les variétés de Hilbert-Siegel, une première piste a été d'essayer d'identifier le plus finement possible les zones où la dynamique de l'opérateur de Hecke posait problème, et d'essayer d'obtenir le plus d'informations possibles sur les points de U_p, et notamment le nombre de points de U_p où le degré restait le même. Une première piste explorée a été d'utiliser tous les opérateurs de Hecke en p. Ainsi, pour la variété de Siegel de genre 2, paramétrant des couples (A, H_1, H_2), l'opérateur U_p augmente le degré de H_2, et l'augmente strictement sauf si celui-ci est entier. Il existe un autre opérateur de Hecke en p, $U_{p,1}$, qui vérifie la même propriété pour H_1.

En utilisant la dynamique de ces deux opérateurs, on peut donc se ramener aux zones où les degrés de H_1 et H_2 sont tous les deux entiers. Or si ces deux degrés sont entiers, alors on se trouve sur le lieu ordinaire, qui est bien connu, et où l'on peut construire les séries de Kassaei. Cela permet donc de donner une autre preuve plus simple de ce cas, mais avec la condition additionnelle que la forme modulaire soit propre pour l'opérateur $U_{p,1}$ de valeur propre non nulle. Si on applique cette stratégie pour les variétés de Hilbert-Siegel (de genre 2 par exemple), paramétrant les couples (A, H_1, H_2) où chacun des objets est muni d'une action de O_F (F est un corps totalement réel), alors on se ramène au lieu où chacun des degrés partiels des H_i est entier. Une étude approfondie des sous-groupes de $A[p]$ sur ces zones montrent que les situations sont variables : dans certains cas, il y a au plus 1 mauvais supplémentaire de H_2, mais sur certaines zones, il peut y avoir un nombre variable de mauvais supplémentaires. Cela suggère donc de découper ces zones suivant le nombre de mauvais supplémentaires ; on se rend alors compte qu'il n'y a pas besoin d'information précise sur le nombre de ces supplémentaires : pour chaque point x, on peut décomposer U_p en $U_p^{good} + U_p^{bad}$, où U_p^{good} correspond aux « bons » supplémentaires, et U_p^{bad} aux « mauvais ». Il suffit ensuite de trouver les bonnes zones sur lesquelles cette décomposition a un sens, c'est-à-dire découper la zone suivant le nombre de mauvais supplémentaires.

Initialement, il semblait important que l'opérateur U_p^{good} ne soit pas nul ; cela implique que son image est incluse dans une zone de définition de la forme modulaire, et permet de définir la série de Kassaei. Prouver que cet opérateur est non nul est équivalent à montrer qu'il existe au moins un bon supplémentaire. Nous sommes arrivés à prouver que c'est effectivement le cas (au moins si $p \geq 5$). Néanmoins, il s'avère que le fait que U_p^{good} soit nul n'est pas problématique. Dans ce cas, tous les points de U_p sont mauvais, et il faut tous les négliger ; la série de Kassaei d'ordre 1 est alors nulle.

De même, il nous semblait important de distinguer les zones où la dynamique de l'opérateur de Hecke posait problème (les zones de degré entier) et les autres. C'est-à-dire qu'il fallait construire des séries sur chaque zone de degré entier, et ensuite raisonner par récurrence pour étendre la forme surconvergente à toute la variété. En réalité, ce n'est pas nécessaire, et on peut raisonner comme suit. On peut tout d'abord étendre la forme initiale à la zone où le degré est strictement supérieur au degré maximal moins 1. Ensuite, on considère toute la zone restante (et même un voisinage strict de celle-ci). On peut construire des séries de Kassaei sur cette zone et les recoller. De cette manière, nous n'avons que deux étapes dans le prolongement analytique, qui sont les analogues des étapes de Buzzard et Kassaei. Avec cette méthode, nous prouvons donc le théorème de classicité suivant.

Théorème. *Soit p un nombre premier, et X une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau Iwahorique en p. On suppose que p est non ramifié dans le corps CM ou totalement réel associé à cette variété, et que sur $\mathbb{Q}_p$, la variété de Shimura est associée à un produit d'algèbres de matrices. Soit f une forme modulaire surconvergente sur X de poids κ. On suppose que f est propre pour une famille (U_i) d'opérateurs de Hecke en p, de valeurs propres (a_i). Si le poids κ est suffisamment grand devant la famille des $(v(a_i))$, alors f est classique.*

Dans le cas des formes modulaires associées à un groupe sur $\mathbb{Q}$ dont la restriction à $\mathbb{Q}_p$ est $G(Res_{\mathbb{Q}_{p^d}/\mathbb{Q}_p} Sp_{2g})$ ($\mathbb{Q}_{p^d}$ est l'unique extension non ramifiée de degré d de $\mathbb{Q}_p$), nous obtenons le théorème suivant.

Théorème (Théorème 1.4.17)**.** *Soient F un corps totalement réel de degré d dans lequel p est inerte et $\Sigma_p = Hom(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$. On considère la variété de Shimura associée à un groupe sur $\mathbb{Q}$, qui est isomorphe sur $\mathbb{Q}_p$ à $G(Res_{\mathbb{Q}_{p^d}/\mathbb{Q}_p} Sp_{2g})$. Soit f une forme modulaire surconvergente de poids $\kappa = (k_{1,i} \geq \dots \geq k_{g,i})_{i \in \Sigma_p}$ (voir* 1.3.1 *pour la définition précise), propre pour U_p (défini dans* 1.3.2*) avec la valeur propre a_p. Supposons que*

$$v(a_p) + \frac{dg(g+1)}{2} < \inf_i k_{g,i}$$

Alors f est classique.

Ce théorème reste vrai si on suppose simplement p non ramifié dans F : il y a alors autant d'opérateurs de Hecke que de places au-dessus de p, et donc de conditions sur les pentes pour que la forme modulaire soit classique.

La méthode utilisée ici est très générale, et permet d'obtenir un résultat similaire pour les variétés de Shimura PEL de type (A) associées à des groupes unitaires. Plus précisément, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème (Théorème 1.5.20)**.** *Soit F_0 un corps totalement réel de degré d dans lequel p est inerte, F une extension CM de F_0 dans lequel p est non ramifié. Nous considérons la variété de Shimura PEL associée à un groupe unitaire relatif à F/F_0 de signature $((a,b),\dots,(a,b))$ en p si p est décomposé dans F, et de signature $((a,a),\dots,(a,a))$ si p est inerte dans F (dans ce cas on note $b=a$). Soit $\Sigma_p = Hom(F_0, \overline{\mathbb{Q}_p})$ et f une forme modulaire surconvergente de poids $\kappa = \ ((k_{1,i} \geq \dots \geq k_{a,i}),(l_{1,i} \geq \ \dots \geq \ l_{b,i}))_{i \in \Sigma_p}$ (voir* 1.5.3 *pour la définition précise), propre pour U_p, de valeur propre a_p. Supposons que*

$$v(a_p) + dab < \inf_i (k_{a,i} + l_{b,i})$$

Alors f est classique.

Là encore, le résultat se généralise au cas où le nombre premier p est non ramifié dans F. Il y a alors autant d'opérateurs de Hecke et de conditions à vérifier que de places au-dessus de p dans F_0. Il est également vrai pour les variétés de Shimura PEL de type (A) associées à F/F_0 si p est non ramifié dans F (voir le théorème 1.5.20). Dans ces cas, des signatures plus générales sont autorisées, mais pour que le problème ait un sens, nous devons supposer que le lieu ordinaire est non vide. D'après Wedhorn (voir [We]), cela est équivalent au fait que p soit totalement décomposé dans le corps réflexe E associé à la variété de Shimura. Cette condition impose des relations sur la signature du groupe unitaire dans le cas (A), ce qui justifie les hypothèses du théorème précédent.

Nous avons donc démontré des théorèmes de classicité pour les formes modulaires surconvergentes (de pente petite devant le poids) pour les variétés de Shimura PEL de type (A) ou (C), sous l'hypothèse que le nombre premier p est non ramifié dans la donnée de Shimura.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas général, c'est-à-dire en autorisant le nombre premier p à être ramifié. Une différence avec le cas précédent, qui ne pose pas de problème, est que les zones où la dynamique de l'opérateur de Hecke peut poser problème ne correspondent plus à des points de degré entier mais de degré multiple de $1/e$, où e est l'indice de ramification. Cela a pour conséquence de modifier la condition entre le poids et la pente dans le théorème de classicité. Un autre point qui pose plus de difficultés, et que nous avons éludé dans la discussion précédente, concerne les compactifications de la variété de Shimura. En effet, les variétés de Shimura considérées possèdent des compactifications toroïdales définies sur le corps réflexe (voir [Pin] par exemple), et une forme modulaire classique est par définition une section d'un certain faisceau sur une de ces compactifications. De plus, si la codimension du bord de la variété de Shimura dans sa compactification minimale est plus grande que 2 (on exclut principalement le cas de la courbe modulaire), les sections du faisceau des formes modulaires sur la variété non compactifiée s'étendent automatiquement aux compactifications toroïdales par un principe de Koecher, ce qui justifie qu'on néglige le bord dans la définition des formes modulaires.

Dans les cas précédents, nous avons étendu notre forme surconvergente à l'espace rigide associé au modèle entier de la variété de Shimura (défini par Kottwitz), mais il nous reste à prouver que celle-ci est algébrique, c'est-à-dire qu'elle provient bien d'une section sur la variété algébrique. Introduisons quelques notations : soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, O_K son anneau des entiers, X une variété de Shimura définie sur O_K, et on note X_{rig} l'espace rigide associé à X. Si ω^κ désigne le faisceau des formes modulaires, nous avons étendu notre forme modulaire surconvergente en un élément de $H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$. Supposons qu'il soit possible de construire une compactification $\overline{X}$ de X sur O_K, et notons $\overline{X}_{rig}$ l'espace rigide associé. Supposons également que la codimension du bord de la variété de Shimura dans sa compactification minimale est plus grande que 2. Alors un principe de Koecher rigide prouve que $H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa) = H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$. Comme l'espace $\overline{X}$ est propre, on a par un principe GAGA $H^0(\overline{X} \times_{O_K} K, \omega^\kappa) = H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa)$. Cela prouve donc que la forme modulaire que l'on a étendue à tout l'espace rigide provient bien d'une forme classique. Dans les cas précédents, la construction des modèles entiers des compactifications ont été faits dans [P-S 2], et reposent sur les travaux de Lan ([La]) et Stroh ([St]). Citons également un autre travail de Lan ([La2]) pour le principe de Koecher.

Dans le cas où le nombre p est ramifié, la construction générale des modèles entiers des compactifications n'est pas connu. Dans le cas des variétés de Hilbert, Rapoport ([Ra]) a construit des modèles entiers des compactifications pour les variétés sans niveau en p. Nous adaptons ici sa construction pour les variétés de Hilbert de niveau Iwahorique, ce qui nous permet d'obtenir le théorème de classicité.

On considère la variété de Hilbert associée à un corps totalement réel F. Soit $(p) = \prod \pi_i^{e_i}$ la décomposition de l'idéal engendré par p dans O_F, l'anneau des entiers de F. On note également f_i le degré résiduel de π_i. Soit $\Sigma_i = \{\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p}), v(\sigma(\pi_i)) > 0\}$; les ensembles Σ_i forment une partition de $\Sigma = \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$, et sont de cardinal $e_i f_i$. Le poids d'une forme modulaire de Hilbert est alors un caractère de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$, que l'on peut voir comme un élément de $\mathbb{Z}^\Sigma$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème (Théorème 2.3.1). *Soit f une forme de Hilbert surconvergente, de poids $\kappa = (k_\sigma)$, où σ parcourt l'ensemble Σ. Supposons que f soit propre pour les opérateurs de Hecke U_{π_i}, de valeurs propres a_i, et que l'on ait pour tout i*

$$e_i(v(a_i) + f_i) < \inf_{\sigma \in \Sigma_i} k_\sigma$$

Alors f est classique.

Pour des variétés de Shimura plus générales, il semble très technique d'adapter les méthodes de Lan pour construire des modèles entiers des compactifications. Il est peut-être possible de les définir par normalisation dans un autre espace. En effet, si X désigne la variété de Shimura entière, il existe un morphisme $X \to Y$, où Y est une variété de Siegel, pour laquelle il est possible de construire des modèles entiers des compactifications. On peut alors définir une compactification de X comme la normalisation de cet espace dans une compactification de Y. La difficulté technique est alors de prouver que cet espace vérifie les propriétés attendues, notamment le principe de Koecher.

Pour éviter ces difficultés, nous avons décidé de travailler avec le modèle rationnel de la variété de Shimura, et l'espace analytique associé. Rappelons que si K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et X un K-schéma de présentation finie, alors on peut associer à X un espace rigide X^{an}, l'analytifié de X, dont les $\overline{K}$-points sont les mêmes que ceux de X. Nous travaillons donc avec l'analytifié de la variété de Shimura. Les principales difficultés concernent les structures entières, qui étaient présentes naturellement dans les cas précédents. En particulier, il est nécessaire de définir la fonction degré, ainsi qu'une norme sur l'espace des formes modulaires. Si x est un point de cet espace analytique, il correspond à une variété abélienne A définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, avec des structures additionnelles. D'après un théorème de réduction semi-stable de Grothendieck, on sait que quitte à étendre L, il existe un schéma semi-abélien A_0 sur O_L égal à A en fibre générique. En utilisant ce schéma semi-abélien, on peut donc définir les degrés pour les sous-groupes de A, ainsi qu'un modèle entier pour l'espace vectoriel ω_A.

Cette définition point par point des structures entières peut être globalisée de la manière suivante. Soit X la variété de Shimura sur K considérée et X^{an} son analytifié ; alors il existe un morphisme de X vers une variété de Siegel A_g. Soit $\overline{A_g}$ une compactification entière de A_g, et $\overline{A_g}^{rig}$ l'espace rigide associé. Alors on a un morphisme $X^{an} \to \overline{A_g}^{rig}$. Les structures entières définies sur $\overline{A_g}^{rig}$ peuvent donc se transporter naturellement sur X^{an}.

Puisque nous n'utilisons pas les modèles entiers des variétés de Shimura, nous devons modifier notre définition des formes modulaires surconvergentes. Dans les paragraphes précédents, nous utilisions une forme faible des formes surconvergentes : il s'agissait de sections définies sur un voisinage strict du lieu ordinaire-multiplicatif dans l'espace rigide X_{rig} associé au modèle entier de la variété de Shimura. Dans cette partie, puisque nous travaillons avec l'espace analytifié X^{an}, nous devons changer cette définition. Une définition forte des formes surconvergentes est alors une section définie sur un voisinage strict du lieu ordinaire-multiplicatif dans l'espace rigide $\overline{X}^{an}$, où $\overline{X}$ est une compactification rationnelle de X et $\overline{X}^{an}$ son analytifié.
Ainsi, le cas ramifié qui pouvait semblait très compliqué de premier abord, ne présente pas de difficulté majeure pour notre méthode de démonstration. Cela provient du fait que notre méthode repose sur quelques propriétés clés, notamment la définition de la fonction degré, et le fait que l'opérateur de Hecke augmente le degré, et l'augmente strictement en dehors de certaines zones. Si l'on réussit à prouver ces propriétés, alors il est légitime de penser que notre méthode de démonstration s'adaptera. Au final, nous obtenons le théorème de classicité suivant.

Théorème (Théorèmes 3.4.1 et 3.5.18)**.** *Soit p un nombre premier, et X une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau Iwahorique en p. On suppose que sur $\mathbb{Q}_p$*

l'algèbre de la donnée de Shimura est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices. Soit f une forme modulaire surconvergente (au sens fort) sur X de poids κ. On suppose que f est propre pour une famille (U_i) d'opérateurs de Hecke en p, de valeurs propres (a_i). Si le poids κ est suffisamment grand devant la famille des $(v(a_i))$, alors f est classique.

Nous avons également un résultat de classicité pour les variétés de Shimura avec un niveau arbitraire en p. Remarquons que dans ce cas, la variété de Shimura ne possède pas de modèle entier, donc la situation est a priori plus compliquée que la précédente. Cependant, puisque nous travaillions avec l'espace X^{an}, notre résultat se généralise dans ce cas.

Théorème (Théorème 3.6.11)**.** *Soit p un nombre premier, et X une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau $\Gamma_1(p^n)$ en p. On suppose que sur $\mathbb{Q}_p$ l'algèbre de la donnée de Shimura est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices. Soit f une forme modulaire surconvergente (au sens fort) sur X de poids κ. On suppose que f est propre pour une famille (U_i) d'opérateurs de Hecke en p, de valeurs propres (a_i). Si le poids κ est suffisamment grand devant la famille des $(v(a_i))$, alors f est classique.*

Dans les deux théorèmes précédents, les relations entre le poids et les pentes sont les mêmes, et sont analogues à celles des théorèmes précédents (voir les théorèmes 3.4.1 et 3.5.18 pour plus de détails). La méthode du prolongement analytique, initialement développée par Buzzard et Kassaei dans le cas de la courbe modulaire, se généralise donc à beaucoup d'autres cas. En effet, cette méthode repose sur la dynamique des opérateurs de Hecke, l'étude de zones de prolongement automatique, et la construction de séries pour les zones restantes. Si elle est différente de la méthode originale de Coleman, elle a une portée beaucoup plus générale. Remarquons que la méthode de Coleman a été généralisée notamment dans le cas Hilbert par les travaux de Tian et Xiao ([T-X]) et Johansson ([Jo]). Cette méthode semble plus précise, dans le sens où les bornes obtenues dans la classicité sont meilleures. En effet, dans le cas Hilbert, notre borne pour la classicité est $d + v(a_p) < \inf_i k_i$, où d est le degré du corps totalement réel. Conjecturalement, une borne optimale serait $1 + v(a_p) < \inf_i k_i$.

Mentionnons maintenant une application que peuvent avoir les théorèmes de classicité. Les formes surconvergentes peuvent être utilisées pour construire les variétés de Hecke (ou eigenvarieties). Ces variétés, définies au-dessus de l'espace des poids (qui généralise les poids classiques), paramètrent des systèmes de valeurs propres pour les opérateurs de Hecke agissant sur les formes modulaires surconvergentes. Les théorèmes de classicité que nous démontrons permettent donc de prouver qu'un point sur cette variété est un point classique si son poids est classique, et est suffisamment grand devant la pente (pour être complet, il faut d'abord démontrer un théorème de classicité au niveau des faisceaux, c'est-à-dire que la forme surconvergente est une section du faisceau classique, avant d'appliquer notre théorème). Pour la construction des variétés de Hecke, nous renvoyons par exemple aux travaux de Coleman-Mazur ([CM]) pour la courbe modulaire, d'Andreatta, Iovita et Pilloni pour les variétés de Hilbert ([AIP]) et pour les variétés de Siegel ([AIP2]), et à Brasca ([Br]) pour des variétés de Shimura plus générales, mais cette liste est loin d'être exhaustive.

Enfin, les travaux réalisés ici peuvent sûrement se généraliser à d'autres cas. En effet, on peut également considérer des variétés de Shimura de type de Hodge. Il y a un schéma abélien universel sur ces variétés, mais celles-ci ne sont plus nécessairement associées à des espaces de modules. Le schéma abélien universel permet de définir un lieu ordinaire. Dans le cas où celui-ci est non vide, il est naturel d'essayer de construire des formes surconvergentes. Dans ce cas, notre méthode pourrait fournir un critère de classicité pour ces formes surconvergentes. Une autre généralisation possible des formes surconvergentes concerne les variétés de Shimura PEL dont le lieu ordinaire est vide. D'après [We], si le nombre premier p est non ramifié dans la donnée de Shimura, il existe toujours un lieu appelé μ-ordinaire dans la fibre spéciale de ces variétés, qui est ouvert et dense (pour la variété sans niveau en p). Il est égal au lieu ordinaire seulement sous certaines conditions. Une généralisation des formes modulaires surconvergentes serait alors une section d'un certain faisceau sur un voisinage strict du tube du lieu μ-ordinaire. Il est possible que les résultats obtenus ici s'adaptent à ce cas, et permettent ainsi de montrer qu'une telle forme surconvergente est classique si le poids est grand devant les valuations des valeurs propres de certains opérateurs de Hecke. Néanmoins, pour que ce résultat ait vraiment un sens, il est nécessaire de développer tout d'abord une théorie plus approfondie des formes p-adiques et surconvergentes dans ce contexte.

Parlons à présent de l'organisation du texte. Le premier chapitre est consacré à l'étude du cas où p est non ramifié dans les corps de nombres considérés. Après une partie consacrée à des rappels de géométrie rigide, ainsi qu'à la démonstration de points techniques qui nous serviront dans la suite et la définition des degrés partiels, nous étudions le cas des variétés de Hilbert-Siegel. Il s'agit du cas le plus simple pour lequel aucun résultat de classicité n'était connu dans le cas où p n'est pas totalement décomposé, et il nous semble important de détailler ce cas pour une meilleure compréhension de la méthode de notre démonstration. Dans la deuxième partie, nous définissons donc la variété de Hilbert-Siegel, les formes modulaires sur cette variété et l'opérateur de Hecke, ainsi que la décomposition de cet opérateur sur une certaine zone. La troisième partie conclut la preuve du théorème de classicité, en introduisant notamment les séries de Kassaei et montrant comment les recoller. Les quatrième et cinquième parties sont consacrées respectivement aux variétés de Shimura PEL de type (C) ou (A). Les variétés de type (C) étant proches des variétés de Hilbert-Siegel, nous avons choisi de les présenter en premier. Pour la clarté de la rédaction, nous avons également choisi de traiter les deux cas séparément.

Le deuxième chapitre est consacré aux variétés de Hilbert (en autorisant le nombre premier p à être ramifié). Après avoir défini la variété de Hilbert, les formes modulaires et les opérateurs de Hecke, nous détaillons la construction des séries de Kassaei et prouvons le théorème de classicité. Enfin, la dernière partie est consacrée à la construction de compactifications toroïdales pour la variété de Hilbert en niveau Iwahorique.

Le troisième chapitre traite le cas ramifié général. Les quatre premières parties concernent les variétés de type (C). Nous détaillons notamment dans la deuxième partie comment construire les structures entières, c'est-à-dire les fonctions degré et un modèle entier pour le faisceau des formes modulaires. Dans les troisième et quatrième parties, nous montrons comment notre méthode de démonstration dans les cas précédents s'adapte pour prouver un résultat de classicité dans le cas général. Dans la cinquième partie, nous présentons le cas des variétés de type (A). Il n'y a pas de différence fondamentale entre le cas (C) et le cas (A), mais avons préféré les séparer pour plus de simplicité et de lisibilité. Enfin la sixième partie est consacrée aux variétés de niveau arbitraire en p.

Chapitre 1

Cas non ramifié

Dans ce chapitre, nous étudions le cas de variétés avec l'hypothèse que le nombre premier p est non ramifié dans les corps de nombres associés à celle-ci.

1.1 Préliminaires

Nous présentons ici quelques rappels de géométrie rigide, et prouvons plusieurs propositions techniques qui nous seront utiles par la suite.

1.1.1 Géométrie rigide

Commençons par effectuer quelques rappels de géométrie rigide ; pour plus de détails on peut se référer à [Bo2] ou [Be]. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$; on munit K de la valuation v normalisée de telle sorte que $v(p) = 1$, et de la norme $|x| = p^{-v(x)}$ pour tout x non nul dans K. On notera O_K son anneau des entiers. On rappelle que l'algèbre des fonctions sur la boule unité est

$$K\langle T_1, \dots, T_n\rangle := \{ \sum_{\underline{m}\in\mathbb{N}^n} a_{\underline{m}} T^{\underline{m}} \ , \ |a_{\underline{m}}| \underset{|\underline{m}|\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

Ici $\underline{m}$ est un multi-indice $(m_1, \dots, m_n)$, $|\underline{m}| := m_1 + \dots + m_n$ et $T^{\underline{m}} := \prod_i T_i^{m_i}$.

Définition 1.1.1. Une algèbre de Tate est une algèbre de la forme

$$A = K\langle T_1, \dots, T_n\rangle / I$$

où I est un idéal de $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$.

D'après [Bo, 1.2], l'anneau $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ est noethérien, donc ses idéaux sont de type fini. Ils sont également automatiquement fermés d'après [Bo, 1.3]. Si A est une algèbre de Tate, on lui associe l'espace $X = \mathrm{Spm}\ A$ ($\mathrm{Spm}\ A$ est le spectre maximal de A), que l'on munit de la topologie de Grothendieck (voir [Be, 0.1.2]). Si $x \in X$, alors le corps résiduel

$K(x)$ de A en x est une extension finie de K ; ainsi il existe une unique norme sur $K(x)$ étendant la norme naturelle sur K. Grâce au théorème d'acyclicité de Tate ([Bo, 1.9] par exemple), on dispose également du faisceau naturel $\mathcal{O}_X$ sur X. Un espace X de cette forme sera appelé espace rigide affinoïde (ou plus simplement affinoïde).

Définition 1.1.2. Un espace rigide sur K est un ensemble X munie d'une topologie de Grothendieck saturée et d'un faisceau de K-algèbres, tel qu'il existe un recouvrement admissible $(X_i)_i$ de X, chaque X_i étant isomorphe à un espace rigide affinoïde.

La plupart des espaces rigides que nous considérerons proviendront de schémas sur K ou O_K. Avant d'introduire les principales constructions d'espaces rigides, rappelons le lien entre espaces rigides et schémas formels. On note $O_K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ la sous-algèbre de $K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$ constituée des fonctions à coefficients dans O_K.

Définition 1.1.3. Une O_K-algèbre admissible A est une algèbre de la forme

$$A = O_K\langle T_1, \dots, T_n\rangle/I$$

où I est un idéal de type fini de $O_K\langle T_1, \dots, T_n\rangle$, et tel que A n'a pas de p-torsion.

Si A est une O_K-algèbre admissible, on la munit de la topologie p-adique ; on peut alors considérer en particulier le schéma formel Spf A associé à A.

Définition 1.1.4. Soit $\mathfrak{X}$ un O_K schéma formel. Il est admissible s'il est localement isomorphe au spectre formel d'une O_K-algèbre admissible.

Si A une O_K-algèbre admissible, alors $A \otimes_{O_K} K$ est une algèbre de Tate. Le foncteur fibre générique, qui à une O_K-algèbre admissible A associe sa fibre générique $A \otimes_{O_K} K$ s'étend aux schémas formels admissibles.

Proposition 1.1.5 ([Bo2] Proposition 5.4)**.** *L'application*

$$rig : \mathfrak{X} \to X = \mathfrak{X} \otimes_{O_K} K$$

définit un foncteur de la catégorie des O_K schémas formels admissibles dans celle des espace rigides sur K. On dit que X est la fibre générique de $\mathfrak{X}$.

Un théorème très important de Raynaud dit que ce foncteur devient une équivalence de catégorie, après localisation de la catégorie des O_K-schémas formels admissibles par les éclatements admissibles (avec des hypothèses de quasi-compacité et quasi-séparation). Rappelons la définition d'un éclatement admissible.

Définition 1.1.6. Soit $\mathfrak{X}$ un O_K schéma formel admissible, $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux sur $\mathfrak{X}$. L'éclatement $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ par rapport à $\mathcal{I}$ est admissible, si $\mathcal{I}$ ouvert, c'est-à-dire que localement sur $\mathfrak{X}$, il contient $p^n\mathcal{O}_X$ pour un certain entier n.

On a alors l'équivalence de catégories suivante, due à Raynaud.

Théorème 1.1.7 ([Bo2] Théorème 6.4). *Le foncteur rig induit une équivalence de catégories*

$$\left\{ \begin{array}{c} O_K \textit{ schémas formels} \\ \textit{admissibles quasi-compacts} \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{c} \textit{éclatements} \\ \textit{admissibles} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \textit{espaces rigides quasi-compacts} \\ \textit{quasi-séparés sur } K \end{array} \right\}$$

Montrons maintenant comment on peut associer des espaces rigides à certains schémas. Soit X un O_K-schéma localement de présentation finie. On note $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale.

Définition 1.1.8. L'espace rigide associé à X est la fibre générique de $\mathfrak{X}$. On notera X_{rig} cet espace rigide.

Exemple 1.1.9. *Si $X = Spec\ O_K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, alors*

$$X_{rig} = \ Spm\ K\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/(f_1, \ldots, f_m)$$

En particulier, si X est la droite affine, alors X_{rig} est la boule unité fermée.

Soit maintenant X un K-schéma de présentation finie. On ne peut alors lui associer canoniquement un schéma formel. Néanmoins, il est possible de munir l'ensemble des points fermés de X d'une structure analytique. Explicitons cette construction dans le cas affine.
Soit $X = \text{Spec } K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ un K-schéma de présentation finie. Pour tout entier $j \geq 1$, on pose $Y_i^{(j)} = p^j X_i$, et $f_i^{(j)} = f_i(p^{-j}X_1, \ldots, p^{-j}X_n)$, de telle sorte que $X = \text{Spec } K[Y_1^{(j)}, \ldots, Y_n^{(j)}]/(f_1^{(j)}, \ldots, f_m^{(j)})$. Soit $X^{(j)}$ l'espace rigide égal à

$$X^{(j)} = \text{Spm } K\langle Y_1^{(j)}, \ldots, Y_n^{(j)}\rangle/(f_1^{(j)}, \ldots, f_m^{(j)})$$

Les points fermés de $X^{(j)}$ s'identifient alors aux points fermés $(x_1, \ldots, x_n)$ de X tels que $|x_i| \leq p^j$ pour tout i. On définit alors l'espace rigide X^{an} comme la réunion des $X^{(j)}$ pour j entier.

Proposition 1.1.10 ([Be] Paragraphe 0.3). *Il existe une construction fonctorielle $X \to X^{an}$ pour tout K-schéma X localement de présentation finie compatible avec la construction précédente. De plus, si $U = D(f)$ est un ouvert de X, alors U^{an} s'identifie à l'ouvert admissible $D(f)$ de X^{an} défini comme l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.*

Exemple 1.1.11. *Si X est la droite affine sur K, alors X^{an} est le « plan rigide », c'est-à-dire l'union croissante des boules de rayon p^n pour tout n.*

On appellera X^{an} l'analytifié de X. Pour résumer, si X est un O_K-schéma localement de présentation finie, on a construit deux espaces rigides X_{rig} et X^{an}, ce dernier espace étant construit à partir de $X \times_{O_K} K$. Si $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K, et $O_{\overline{K}}$ son anneau des entiers, alors on a $X_{rig}(\overline{K}) = X(O_{\overline{K}})$, et $X^{an}(\overline{K}) = X(\overline{K})$. On a de plus la relation suivante entre X_{rig} et X^{an}.

Proposition 1.1.12 ([Be] Proposition 0.3.5). *Il existe un morphisme canonique $X_{rig} \to X^{an}$. Ce morphisme est une immersion ouverte lorsque X est séparé et de type fini, et est un isomorphisme lorsque X est propre sur O_K.*

1.1.2 Normes

Dans cette partie, nous cherchons à définir une norme sur les sections d'un faisceau localement libre sur un espace rigide. Soit A une algèbre de Tate, $f \in A$ et x un point de Spm A. Alors la norme de f en x est définie de manière canonique. En effet, si $K(x)$ définit le corps résiduel en x, il existe une unique norme sur $K(x)$ étendant la norme sur K. On définit alors l'élément $|f(x)|$ comme la norme de f dans $K(x)$. On définit l'élément $|f|$ comme le supremum des $|f(x)|$ pour x dans Spm A ; c'est un élément fini, et cela permet de définir une semi-norme sur A, et c'est une norme si A est réduit. Par un abus de notation, nous parlerons toujours de norme dans ce paragraphe, car les espaces que nous rencontrerons en pratique seront réduits. Plus généralement, si X_{rig} est un espace rigide, $f \in H^0(X_{rig}, \mathcal{O}_{X_{rig}})$, et $x \in X_{rig}$, alors la norme de f en x, $|f(x)|$ est définie de manière canonique. En revanche, si $\mathcal{F}$ est un faisceau inversible sur X_{rig}, il n'existe pas de norme canonique pour les éléments de $H^0(X_{rig}, \mathcal{F})$, car pour définir une telle norme, il faut utiliser une trivialisation de $\mathcal{F}$, qui n'est pas définie canoniquement.
Cependant, dans le cas où X_{rig} provient d'un O_K-schéma de présentation finie X, et $\mathcal{F}$ d'un faisceau sur X, alors on dispose d'un modèle entier canonique pour X_{rig}, ce qui nous permet de définir une norme de façon canonique. Nous suivons à présent [Ka]. Soit X un O_K-schéma de présentation finie, $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale, et X_{rig} sa fibre générique. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur X. Soit $\mathcal{F}_{rig}$ le faisceau induit sur X_{rig}. Soit L une extension finie de K et x : Spm $L \to X_{rig}$ un L-point. Il provient d'un unique O_L-point, $\tilde{x}$: Spf $O_L \to \mathfrak{X}$. On dispose d'une identification naturelle : $\tilde{x}^*\mathcal{F} \otimes_{O_L} L \simeq x^*\mathcal{F}_{rig}$. Si $f \in x^*\mathcal{F}_{rig}$, on pose $|f| = \inf\{|\lambda|, \lambda \in K^*, \frac{1}{\lambda}f \in \tilde{x}^*\mathcal{F}\}$.

Définition 1.1.13. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de X_{rig}, $f \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{rig})$ et x un point de $\mathcal{U}$, on pose

$$|f(x)| = |x^*f|$$

et $|f|_{\mathcal{U}} = \sup_{x\in\mathcal{U}} |f(x)|$. Cet élément peut éventuellement être infini, mais $|f|_{\mathcal{U}} < \infty$ si $\mathcal{U}$ est quasi-compact.

Si X est un espace rigide, on notera $\widetilde{\mathcal{O}_X}$ le faisceau des fonctions de norme inférieure ou égale à 1. On notera également $\widetilde{\mathcal{F}}_{rig}$ le sous faisceau de $\mathcal{F}_{rig}$ des éléments de norme inférieure ou égale à 1. Ce sous-faisceau définit un modèle entier de $\mathcal{F}$ au sens suivant.

Définition 1.1.14. Soit X un espace rigide, et $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang d sur X. Un modèle entier pour $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ tel que $\widetilde{\mathcal{F}}$ soit localement isomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}_X}^d$.

Définir une semi-norme pour les sections d'un faisceau est équivalent à définir un modèle entier pour ce faisceau. En effet, si on a défini une semi-norme pour les sections de $\mathcal{F}$, alors $\widetilde{\mathcal{F}}$ sera le sous-faisceau des sections de norme inférieure ou égale à 1. Réciproquement, si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un modèle entier pour $\mathcal{F}$, et f une section de $\mathcal{F}$ sur un ouvert $\mathcal{U}$, on définit la semi-norme de f comme $\inf\{|\lambda|, \lambda \in K^*, \frac{1}{\lambda}f \in \widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\}$.
Dans le paragraphe précédent, nous avons donc vu que si $\mathcal{F}$ est un faisceau localement

libre sur un schéma formel $\mathfrak{X}$, alors le faisceau induit sur la fibre générique de $\mathfrak{X}$ est muni canoniquement d'un modèle entier. De plus, les modèles entiers vérifient la proposition suivante.

Proposition 1.1.15. *Soit $p : X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides, et $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur Y. Si $\mathcal{F}$ est muni d'un modèle entier, alors on peut construire un modèle entier pour $p^*\mathcal{F}$. Si f est une section de $\mathcal{F}$ sur Y, alors on a pour tout $x \in X$*

$$|p^*f(x)| = |f(p(x))|$$

Démonstration. Le morphisme p induit des morphismes de faisceaux

$$p^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \quad \text{et} \quad p^{-1}\widetilde{\mathcal{O}_Y} \to \widetilde{\mathcal{O}_X}$$

On rappelle que par définition $p^*\mathcal{F} = p^{-1}\mathcal{F} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. On pose alors

$$\widetilde{p^*\mathcal{F}} = p^{-1}\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{p^{-1}\widetilde{\mathcal{O}_Y}} \widetilde{\mathcal{O}_X}$$

C'est un faisceau localement isomorphe à une certaine puissance de $\widetilde{\mathcal{O}_X}$, et définit donc un modèle entier pour $p^*\mathcal{F}$.
Concernant le résultat sur les normes, on se ramène au cas où $X = \text{Spm } B$, $Y = \text{Spm } A$, où le faisceau est trivial, et son modèle entier égal à $\widetilde{A}$. Alors le faisceau $p^*\mathcal{F}$ est le faisceau trivial sur X, et son modèle entier est égal à $\widetilde{B}$. Soit $x \in X$, $y = p(x)$. On note $K(y)$ et $K(x)$ les corps résiduels en x et y respectivement. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(y) & \longrightarrow & K(x) \end{array}$$

Si $f \in A$, alors $|f(y)|$ est égal à la norme de f dans $K(y)$. Si on note ϕ le morphisme $A \to B$, alors $|p^*f(x)|$ est égal à la norme de $\phi(f)$ dans $K(x)$. Le résultat résulte alors du fait que le morphisme ϕ au niveau des corps résiduels est une injection de corps valués. $\square$

Reprenons les notations du début du paragraphe. Nous énonçons maintenant un lemme (« gluing lemma »), dû à Kassaei, qui montre qu'une section de $\widetilde{\mathcal{F}}_{rig}$ est déterminée par ses réductions modulo p^n pour tout n. Ce résultat repose sur un théorème de Bartenwerfer ([Ba]), qui dit que l'espace $H^1(X, \widetilde{\mathcal{O}_X})$ est de torsion si X est un espace rigide lisse quasi-compact.

Lemme 1.1.16. *Supposons X_{rig} lisse. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X_{rig}. On a :*

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{rig}) \simeq H^0(\mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{F}}_{rig}) \otimes_{O_K} K \simeq \left(\varprojlim H^0(\mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{F}}_{rig}/p^n)\right) \otimes_{O_K} K$$

Démonstration. Voir [Pi], Corollaire 5.1. $\square$

1.1.3 Voisinage strict et morphismes finis étales

Nous rappelons ici quelques propriétés des morphismes finis étales d'espaces analytiques rigides. Pour les définitions, on pourra se reporter par exemple à [Be]. Tous les espaces rigides considérés ici seront supposés quasi-séparés.

Proposition 1.1.17. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini étale d'espaces analytiques rigides quasi-compacts. Alors l'image d'un ouvert quasi-compact par f est un ouvert quasi-compact.*

Démonstration. D'après [Bo2], un morphisme plat d'espace analytiques rigides quasi-compacts est ouvert. Le morphisme f étant étale, donc plat, il envoie un ouvert quasi-compact sur un ouvert.
Supposons que $\mathcal{U}$ est un ouvert quasi-compact de X, et soit $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$ un recouvrement admissible par des affinoïdes de $f(\mathcal{U})$. Alors $(f^{-1}(\mathcal{V}_i)\cap\mathcal{U})_{i\in I}$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{U}$; on peut donc en extraire un sous-recouvrement admissible fini. Il existe donc un ensemble fini I_0 tel que $(\mathcal{V}_i)_{i\in I_0}$ recouvre $f(\mathcal{U})$. Comme cet espace est quasi-séparé, ce recouvrement est admissible, et cela prouve que l'image de $\mathcal{U}$ par f est quasi-compacte. □

Définissons maintenant la notion de voisinage strict.

Définition 1.1.18. Soit X un espace rigide quasi-compact sur K, et $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact. Un voisinage strict de $\mathcal{U}$ est un ouvert quasi-compact $\mathcal{V}$ contenant $\mathcal{U}$ tel que le recouvrement $(\mathcal{V}, X\backslash\mathcal{U})$ de X soit admissible.

Proposition 1.1.19. *Soit X un espace rigide sur K, $\mathcal{U}_1$,$\mathcal{U}_2$ des ouverts quasi-compacts de X et soit $\mathcal{V}_i$ un voisinage strict de $\mathcal{U}_i$ pour $i = 1, 2$. Alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, et $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ un voisinage strict de $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.*

Démonstration. Traitons par exemple le cas de l'union. Nous devons montrer que le recouvrement $B = (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, X\backslash(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2))$ de X est admissible. Puisque le recouvrement $(\mathcal{V}_1, X\backslash\mathcal{U}_1)$ de X est admissible, il suffit de vérifier que l'intersection du recouvrement B avec $\mathcal{V}_1$ et $X\backslash\mathcal{U}_1$ est admissible. L'intersection de B avec $\mathcal{V}_1$ donne le recouvrement $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1\backslash(\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)))$ de $\mathcal{V}_1$, qui est admissible. L'intersection avec $X\backslash\mathcal{U}_1$ donne le recouvrement $B' = ((\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)\backslash\mathcal{U}_1, X\backslash(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2))$ de $X\backslash\mathcal{U}_1$. Or le recouvrement $B'' = (\mathcal{V}_2\backslash(\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{U}_1), (X\backslash\mathcal{U}_1) \cap (X\backslash\mathcal{U}_2))$ est un recouvrement admissible de $X\backslash\mathcal{U}_1$ car $\mathcal{V}_2$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_2$. Comme B'' est un recouvrement plus fin que B', on en déduit que B' est un recouvrement admissible de $X\backslash\mathcal{U}_1$. □

Les voisinages stricts sont également préservés par les morphismes finis étales.

Proposition 1.1.20. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini étale d'espaces analytiques rigides quasi-compacts sur K. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X et $\mathcal{V}$ un voisinage strict de $\mathcal{U}$ dans X. Alors $f(\mathcal{V})$ est un voisinage strict de $f(\mathcal{U})$ dans Y.*

Démonstration. La propriété à démontrer étant locale, on peut supposer Y affinoïde. Le fait que le recouvrement $(\mathcal{V}, X\backslash\mathcal{U})$ soit admissible implique qu'il existe un ouvert quasi-compact $\mathcal{U}'$ inclus dans le complémentaire de $\mathcal{U}$ tel que $(\mathcal{V},\mathcal{U}')$ est un recouvrement admissible de X. Choisissons des modèles formels $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, et $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, pour X, Y et f respectivement. D'après [BL2] lemme 5.7, quitte à effectuer un éclatement admissible de $\mathfrak{X}$, il existe des sous-schémas ouverts $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{X}$, dont la fibre générique vaut respectivement $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}'$. D'après [BL2] théorème 5.2, quitte à effectuer un éclatement admissible de $\mathfrak{Y}$, et prendre pour $\mathfrak{X}$ le transformé strict, on peut supposer que le morphisme $\mathfrak{f}$ est plat. D'après [BL2] corollaire 5.3, quitte à effectuer un autre éclatement admissible de $\mathfrak{Y}$ et prendre pour $\mathfrak{X}$ le transformé strict, on peut supposer que $\mathfrak{f}$ est quasi-fini. De plus, $\mathfrak{f}$ est séparé d'après [BL1] proposition 4.7. Le fait d'être plat étant stable par changement de base, on s'est donc ramené au cas où le morphisme $\mathfrak{f}$ est quasi-fini, plat et séparé. En raisonnant comme dans [AM] lemme A.1.1., on en déduit que $\mathfrak{f}$ est fini et plat. Soit X_0 la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$, et de même pour Y_0, $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{U}'_0$. Alors $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}'$ sont égaux à l'image inverse de leur fibre spéciale par le morphisme de spécialisation. De plus, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{U}'_0$ sont deux ouverts recouvrant X_0, et on a

$$\mathcal{U}_0 \subset X_0\backslash\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{V}_0$$

Le morphisme f induit sur les fibres spéciales étant fini et plat, les images de $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{V}_0$ par f sont des ouverts de Y_0, et l'image de $X_0\backslash\mathcal{U}'_0$ est un fermé $\mathcal{W}_0$ de Y_0 (le morphisme f est propre, donc fermé). On a alors

$$f(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{W}_0 \subset f(\mathcal{V}_0)$$

Les ouverts $f(\mathcal{U})$ et $f(\mathcal{V})$ sont égaux aux images inverses de $f(\mathcal{U}_0)$ et $f(\mathcal{V}_0)$ par le morphisme de spécialisation. Or si $\mathcal{W}'_0$ désigne le complémentaire de $\mathcal{W}_0$, et $\mathcal{W}'$ l'image inverse de $\mathcal{W}'_0$ par le morphisme de spécialisation, alors $\mathcal{W}'$ est un ouvert quasi-compact contenant le complémentaire de $f(\mathcal{V})$ et contenu dans le complémentaire de $f(\mathcal{U})$. Cela implique que les recouvrements $(f(\mathcal{V}), \mathcal{W}')$ et $(f(\mathcal{V}), Y\backslash f(\mathcal{U}))$ sont admissibles, donc que $f(\mathcal{V})$ est un voisinage strict de $f(\mathcal{U})$. □

Énonçons maintenant un critère de finitude, qui sera très important pour décomposer les opérateurs de Hecke.

Proposition 1.1.21. *Soient X, Y deux espaces rigides séparés, et $f : X \to Y$ un morphisme fini étale. Soit également $\mathcal{U}$ un ouvert de X telle que l'immersion ouverte $\mathcal{U} \to X$ soit quasi-compacte. Supposons que le cardinal des fibres géométriques de $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ soit constant. Alors les morphismes $f_{|\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ et $f_{|X\backslash\mathcal{U}} : X\backslash\mathcal{U} \to Y$ sont finis et étales.*

Démonstration. La propriété étant locale sur Y, on peut supposer Y affinoïde. Alors $X = f^{-1}(Y)$ est également affinoïde, $\mathcal{U}$ est quasi-compact. Soit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ des modèles formels pour X, Y et f respectivement. En raisonnant comme dans la proposition précédente, quitte à effectuer un éclatement admissible de $\mathfrak{X}$, il existe un sous-schéma ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ égal à $\mathcal{U}$ en fibre générique. De même, quitte à effectuer un éclatement

admissible de $\mathfrak{Y}$, on peut supposer que le morphisme $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est séparé, quasi-fini et plat. Le morphisme $\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ est également séparé, quasi-fini et plat. Le lemme A.1.1. de [AM] montre alors que les morphismes $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ sont finis.
Nous allons maintenant montrer que le morphisme $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ est propre. Vérifions le critère valuatif de propreté. Soit R un anneau de valuation de corps des fractions L. Soit y_0 : Spec $R \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fixé. Notons y : Spec $L \to \mathfrak{Y}$ le morphisme induit par y_0. Comme le morphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est fini, il existe un nombre fini de points géométriques au-dessus de y. Soit L' une extension finie telle que les points géométriques au-dessus de y soient des morphismes $x_1, \dots, x_d$: Spec $L' \to \mathfrak{X}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\ L' \arrow[r, "x_i"] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\ R' \arrow[r, "y_0"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où R' est la clôture intégrale de R dans L'. Chacun de ces morphismes se relève de manière unique en $\widetilde{x_i}$: Spec $R' \to \mathfrak{X}$. Supposons que les morphismes $x_1, \dots, x_r$ soient à valeurs dans $\mathfrak{U}$ et $x_{r+1}, \dots, x_d$ à valeurs dans $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U}$. Alors par propreté du morphisme $\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$, les morphismes $\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_r}$ sont à valeurs dans $\mathfrak{U}$. Comme le cardinal des fibres de $\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ est constant, les morphismes $\widetilde{x_{r+1}}, \dots, \widetilde{x_d}$ sont à valeurs dans $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U}$. Nous avons donc prouvé que tout morphisme x_0 : Spec $L \to \mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\ L \arrow[r, "x_0"] \arrow[d] & \mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\ R \arrow[r, "y_0"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

s'étend en un unique morphisme $\widetilde{x_0}$: Spec $R \to \mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U}$. Cela prouve que le morphisme $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{U} \to \mathfrak{Y}$ induit par $\mathfrak{f}$ est propre. On en déduit qu'il est fini d'après [EGA3] Proposition 4.4.2.
Cela implique donc que les morphismes $\mathcal{U} \to Y$ et $X\backslash\mathcal{U} \to Y$ au niveau des espaces rigides sont finis. Il sont également étales, car les morphismes d'inclusion $\mathcal{U} \to X$ et $X\backslash\mathcal{U} \to X$ le sont. □

Remarque 1.1.22. Cette proposition est l'analogue d'un résultat de géométrie algébrique (voir [EGA4-4] cor. 18.2.9). Le lemme A.1.1 de [AM] permet de montrer directement que la restriction de f à $\mathcal{U}$ est finie (mais pas la restriction de f à $X\backslash\mathcal{U}$, car il faut d'abord prouver que l'immersion $X\backslash\mathcal{U} \to X$ est quasi-compacte).

1.1.4 Correspondances cohomologiques

Dans cette partie, nous allons introduire la définition de correspondance cohomologique sur un espace rigide. Cela permet de définir à la fois une correspondance géométrique, et un opérateur agissant sur les sections de certains faisceaux. Nous utiliserons cette définition pour définir des opérateurs de Hecke.

Définition 1.1.23. Soit X, Y, Z des espaces rigides. Une correspondance géométrique entre X et Y en dessous de Z est la donnée de deux morphismes étales $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$. A toute partie S de X on associe la partie $C(S) := q(p^{-1}(S))$ de Y.

Cette correspondance envoie les ouverts sur les ouverts. Si q est de plus finie, elle envoie les ouverts quasi-compacts sur les ouverts quasi-compacts.

Définition 1.1.24. Soient deux faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ définis respectivement sur X et Y et $c : q^*\mathcal{G} \to p^*\mathcal{F}$ un morphisme de faisceaux cohérents. Si p est de plus fini, le morphisme c permet de définir un morphisme $H^0(C(\mathcal{U}), \mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X. Il est défini par

$$H^0(C(\mathcal{U}), \mathcal{G}) \to H^0(p^{-1}(\mathcal{U}), q^*\mathcal{G}) \overset{c}{\to} H^0(p^{-1}(\mathcal{U}), p^*\mathcal{F}) \overset{Tr_p}{\to} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Ce morphisme est la correspondance cohomologique.

1.1.5 Degré et degrés partiels

Dans [Fa], Fargues définit une fonction degré pour les schémas en groupes finis et plats, qui nous sera très utile. Nous en rappelons ici la définition et les principales propriétés. Soit K un extension finie de $\mathbb{Q}_p$, O_K son anneau des entiers et π une uniformisante. Soit également $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit v la valuation sur $\overline{K}$ normalisée par $v(p) = 1$.

Définition 1.1.25. Soit G un schéma en groupes fini et plat sur O_K. Nous définissons le degré de G par

$$\deg\,(G) = v(\mathrm{Fitt}_0\ \omega_G)$$

où

- ω_G est le faisceau conormal de G.
- Fitt_0 désigne l'idéal de Fitting.
- La valuation d'un idéal principal $I = (a)$ est définie par $v(I) := v(a)$.

Ainsi, si $\omega_G = \oplus_{i=1}^d O_K/\pi^{a_i} O_K$, alors $\deg(G) = \sum_{i=1}^d a_i$.

Exemple 1.1.26. *Si G est un schéma en groupes de Oort-Tate sur O_K ([T-O]) de paramètres (a, b), de telle sorte que $G = Spec\ O_K[X]/(X^p - aX)$, alors deg $G = v(a)$.*

De plus, cette fonction a les propriétés suivantes ([Fa]) :

Proposition 1.1.27. *La fonction deg vérifie les propriétés suivantes :*

- *Si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est une suite exacte, alors deg $G_2 =$ deg $G_1 +$ deg G_3.*
- *deg G + deg G^D =ht G, où G^D est le dual de Cartier de G et ht G la hauteur de G.*
- *Si $f : G \to G'$ est un morphisme de schémas en groupes finis et plats sur O_K, qui induit un isomorphisme en fibre générique, alors deg $G \leq$ deg G'. De plus, il y a égalité si et seulement f est un isomorphisme.*

Remarque 1.1.28.

- La deuxième propriété implique en particulier que $\deg G \leq \mathrm{ht}\, G$.
- Si G est de hauteur h, alors $\deg G = 0$ si et seulement si G est étale, c'est-à-dire isomorphe sur $O_{\overline{K}}$ à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^h$. De même, $\deg G = h$ si et seulement si G est multiplicatif, c'est-à-dire isomorphe sur $O_{\overline{K}}$ à μ_p^h.

Définissons maintenant les degrés partiels pour les schémas en groupes finis et plats munis d'une action de l'anneau des entiers d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. Nous appliquerons en particulier ces résultats pour les sous-groupes finis d'un groupe p-divisible. Soit F une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f, et O_F son anneau des entiers. On a donc $O_F = W(\mathbb{F}_{p^f})$ et $F = O_F[1/p]$. Soit S l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$; on sait que S est un groupe cyclique d'ordre f engendré par le Frobenius.
Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant F, et soit H un schéma en groupes fini et plat d'ordre une puissance de p sur O_K muni d'une action de O_F de hauteur fh. Soit ω_H le module des différentielles ; c'est un O_K-module de type fini muni d'une action de O_F. Alors, on a

$$\omega_H = \bigoplus_{s \in S} \omega_{H,s}$$

où $\omega_{H,s}$ est le sous-module de ω_H où O_F agit par s.

Définition 1.1.29. Le degré partiel de H relatif au plongement s de F est défini par

$$\deg_s H := v(\mathrm{Fitt}_0\, \omega_{H,s})$$

Exemple 1.1.30. *Si G est un schéma en groupes de Raynaud sur O_K ([Ray]) de paramètres (a_i, b_i), de telle sorte que $G = Spec\, O_K[X_1, \dots, X_f]/(X_i^p - a_i X_{i+1})$, alors* $\deg_i G = v(a_{i-1})$.

On voit immédiatement que le degré de H est égal à la somme des $\deg_s H$ pour $s \in S$. Nous allons maintenant démontrer des propriétés analogues à la fonction degré pour les degrés partiels.

Proposition 1.1.31. *Les fonctions deg_s sont additives. Plus précisément, soient H_1, H_2 et H_3 trois groupes finis et plats d'ordre une puissance de p munis d'une action de O_F avec une suite exacte*

$$0 \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to 0$$

Alors pour tout $s \in S$

$$deg_s H_2 = deg_s H_1 + deg_s H_3$$

Démonstration. On a une suite exacte de $O_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_F$-modules

$$0 \to \omega_{H_3} \to \omega_{H_2} \to \omega_{H_1} \to 0$$

En décomposant cette suite exacte suivant les éléments de S, on en déduit des suites exactes

$$0 \to \omega_{H_3,s} \to \omega_{H_2,s} \to \omega_{H_1,s} \to 0$$

pour tout $s \in S$. Le résultat en découle. $\square$

Proposition 1.1.32. *Soit H un schéma en groupes fini et plat de d'ordre une puissance de p sur O_K muni d'une action de O_F de hauteur fh. Soit H^D le dual de Cartier de H ; c'est encore un schéma en groupes fini et plat sur O_K muni d'une action de O_F. Alors pour tout $s \in S$,*

$$deg_s H^D = h - deg_s H$$

En particulier, on voit que $deg_s H \in [0, h]$.

Démonstration. On se ramène au cas où H est de p-torsion. Soit $(\mathfrak{M}, \phi)$ le module de Breuil-Kisin de H (voir [Ki]) ; $\mathfrak{M}$ est un $k[[u]]$-module libre de rang fh et ϕ est un endomorphisme semi-linéaire tel que $u^e\mathfrak{M}$ soit inclus dans le module engendré par l'image de ϕ, où k est le corps résiduel de O_K et e son indice de ramification. Le module $\mathfrak{M}$ est muni d'une action de O_F, donc se décompose suivant les éléments de S : $\mathfrak{M} = \oplus_{s \in S} \mathfrak{M}_s$. On choisit une bijection entre S et $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ de telle sorte que ϕ envoie $\mathfrak{M}_i$ dans $\mathfrak{M}_{i+1}$. Les $\mathfrak{M}_i$ sont donc des $k[[u]]$-modules libres de rang h. On note $\phi_i : \mathfrak{M}_{i-1} \to \mathfrak{M}_i$. Fixons une base pour les modules $(\mathfrak{M}_i)$, et soit A_i la matrice de ϕ_i dans cette base. On a alors

$$\deg_i H = \frac{1}{e} v_u(\det A_i)$$

où v_u dénote la valuation u-adique. De plus, le module de Breuil-Kisin de H^D est $(\mathfrak{M}^*, \phi^*)$, où $\mathfrak{M}^*$ est le dual de M, et où ϕ^* peut être décrit comme suit. Le module $\mathfrak{M}^*$ se décompose en $\mathfrak{M}^* = \oplus_{i=0}^{f-1} \mathfrak{M}_i^*$. On muni chaque module $\mathfrak{M}_i^*$ de la base duale de celle des $\mathfrak{M}_i$. Alors la matrice de $\phi_i^* : \mathfrak{M}_{i-1}^* \to \mathfrak{M}_i^*$ dans cette base est $B_i = u^e({}^tA_i)^{-1}$. D'où

$$\deg_i H^D = \frac{1}{e} v_u(\det B_i) = \frac{1}{e}(eh - v_u(\det A_i)) = h - \deg_i H$$

Une autre démonstration possible aurait été de filtrer le groupe H par des groupes de Raynaud (voir [Ray]), et d'utiliser l'additivité des fonctions degrés (la propriété est évidente pour les groupes de Raynaud car on a une description explicite de ces groupes et de leurs duaux). □

Nous avons également une propriété d'augmentation des degrés partiels par déformation. On fixe une identification entre S et le groupe $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, le Frobenius arithmétique étant identifié avec 1.

Proposition 1.1.33. *Soient G et G' deux schémas en groupes finis et plats sur O_K d'ordre une puissance de p munis d'une action de O_F. On suppose qu'il existe un morphisme O_F-linéaire $f : G \to G'$, qui est un isomorphisme en fibre générique. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{i=0}^{f-1} p^i \deg_{j-i} G \leq \sum_{i=0}^{f-1} p^i \deg_{j-i} G'$$

De plus, f est un isomorphisme si et seulement si $\deg_j G = \deg_j G'$ pour tout $j \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$.

Démonstration. On se ramène au cas où G et G' sont de p-torsion. Soient $(\mathfrak{M}, \phi)$ et $(\mathfrak{M}', \phi')$ les modules de Breuil-Kisin associés respectivement à G et G'. On a donc un morphisme $f : \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$. Chacun de ses modules se décompose sous l'action de O_F : on a donc $\mathfrak{M} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_i$, tels que le Frobenius ϕ envoie $\mathfrak{M}_i$ dans $\mathfrak{M}_{i+1}$, et de même pour $\mathfrak{M}'$. Fixons des bases pour les $k[[u]]$-modules libres $\mathfrak{M}_i$, et soit A_i la matrice de $\phi_i : \mathfrak{M}_{i-1} \to \mathfrak{M}_i$. On a donc comme précédemment

$$\deg_i G = \frac{1}{e} v_u(\det A_i)$$

On fait de même pour les modules $\mathfrak{M}'_i$. Le morphisme f induit des morphismes $f_i : \mathfrak{M}'_i \to \mathfrak{M}_i$, tels que $f_i \circ \phi'_i = \phi_i \circ f_{i-1}$. Si on note F_i la matrice de f_i dans les bases introduites, on a donc

$$F_i A'_i = A_i \sigma(F_{i-1})$$

En prenant le déterminant, on obtient

$$\det F_i \det A'_i = (\det F_{i-1})^p \det A_i$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, on a

$$\det F_j \prod_{i=0}^{f-1} (\det A'_{j-i})^{p^i} = (\det F_j)^{p^f} \prod_{i=0}^{f-1} (\det A_{j-i})^{p^i}$$

En passant à la valuation u-adique, et en utilisant le fait que la valuation u-adique de $\det F_j$ est positive, on obtient les relations

$$\sum_{i=0}^{f-1} p^i \deg_{j-i} G \leq \sum_{i=0}^{f-1} p^i \deg_{j-i} G'$$

Supposons maintenant que $\deg_j G = \deg_j G'$ pour tout $j \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Alors les inégalités précédentes sont des égalités, ce qui prouve que tous les f_i sont des isomorphismes, soit que G et G' sont isomorphes.
Ici encore, une autre démonstration possible aurait été de filtrer les groupes G et G' par des groupes de Raynaud. En effet, il est possible de filtrer le groupe G par des sous-groupes (H_i) tels que H_{i+1}/H_i soit un sous-groupe de Raynaud. Il existe également une filtration (H'_i) de G' vérifiant la même propriété telle que le morphisme f induise des morphismes $f_i : H_i/H_{i-1} \to H'_i/H'_{i-1}$ vérifiant les hypothèses de la proposition. En utilisant l'additivité des fonctions degrés, il suffit de prouver la proposition pour les groupes de Raynaud, ce qui est fait dans [P-S 1]. □

1.2 Variétés de Hilbert-Siegel

Dans les deux parties suivantes, nous allons étudier le cas des variétés de Hilbert-Siegel. Commençons par quelques définitions.

1.2.1 L'espace de modules

Soit F une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré d, O_F son anneau des entiers et p un nombre premier inerte dans F. On note F_p la complétion p-adique de F, et $k \simeq \mathbb{F}_q$ le corps résiduel, avec $q = p^d$. On a donc F_p =Frac $W(k)$, où W signifie les vecteurs de Witt.
Soit g un entier strictement positif, et posons $K = F_p$ pour simplifier les notations. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p. Notons également δ la différente de F.

Définition 1.2.1. Soit X l'espace de modules sur O_K dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des quintuplets $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i)$ avec

- $A \to S$ est un schéma abélien de dimension dg.
- $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation principale O_F-linéaire.
- $\iota : O_F \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$ est un morphisme compatible avec l'involution de Rosati.
- $\eta : \delta \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une structure principale de niveau N compatible à O_F.
- $H_1 \subset \cdots \subset H_g \subset A[p]$ est un drapeau complet de la p-torsion, où H_i est un sous-groupe fini et plat totalement isotrope stable par O_F de rang p^{di}.

L'espace de modules X est représentable par un schéma quasi-projectif sur O_K, que l'on notera toujours X. On notera également $X_K = X \times K$, $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale, et X_{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{X}$.

Remarque 1.2.2. Le schéma X est défini sur $\mathbb{Z}_p$, mais ce ne sera pas le cas des faisceaux que nous définirons dans les sections ultérieures.

Définition 1.2.3. On définit l'application $\deg : X_{rig} \to [0, dg]$ par $\deg\,(A, \lambda, \iota, \eta, H_i) := \ \deg H_g$.

Si I est un intervalle inclus dans $[0, dg]$, on note $X_I = \deg^{-1}(I)$. On note également $X_{\geq u} = \deg^{-1}([u, +\infty[)$ et $X_{>u} \ = \ \deg^{-1}(]u, +\infty[)$.

Proposition 1.2.4. *Si I est un intervalle inclus dans $[0, dg]$, alors X_I est un ouvert de X_{rig}. Si I est compact à bornes rationnelles, alors X_I est quasi-compact.*

Démonstration. Sur X l'isogénie universelle $A \to A/H_g$ induit un morphisme $\omega_{A/H_g} \to \omega_A$, où ω_A et ω_{A/H_g} sont les faisceaux conornaux associés respectivement à A et A/H_g. Ce sont des faisceaux localement libres de rang dg sur X. Soient ω'_{A/H_g} et ω'_A les déterminants de ces faisceaux ; ce sont des faisceaux inversibles sur X et on a donc un morphisme $\omega'_{A/H_g} \to \omega'_A$. Ce morphisme induit donc une section $\delta_{H_g} \in H^0(X, \mathcal{L}_{H_g})$, où $\mathcal{L}_{H_g}$ est le faisceau inversible égal à $\omega'_A \otimes \omega'^{-1}_{A/H_g}$.
On notera encore $\mathcal{L}_{H_g}$ le faisceau inversible sur X_{rig} ; on dispose encore d'une section $\delta_{H_g} \in \ H^0(X_{rig}, \mathcal{L}_{H_g})$. D'après le paragraphe 1.1.2, pour tout point x de X_{rig} on peut définir la norme de $\delta_{H_g}(x)$. De plus, en utilisant la définition de la fonction degré, on voit que

$$|\delta_{H_g}(x)| = p^{-\deg H_g(x)}$$

La fonction deg s'exprime donc comme valuation d'une fonction analytique sur X_{rig}. La proposition en découle, puisque si $I = [a, b]$ par exemple, alors

$$X_I = \{x \in X_{rig}, p^{-b} \leq |\delta_{H_g}(x)| \leq p^{-a}\}$$

et on voit donc que X_I est un ouvert quasi-compact. Si I n'est plus un intervalle compact, il faut remplacer certaines inégalités larges par des inégalités strictes, ce qui montre que X_I est un ouvert de X_{rig}. □

1.2.2 Correspondance de Hecke

Soit C_K l'espace de modules sur K, dont les S-points sont les couples $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i, L)$ où $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in X_K(S)$, et L est un supplémentaire de H_g dans $A[p]$, totalement isotrope et stable par l'action de O_F.
On dispose de deux morphismes de C_K vers X_K : $p_1 : (A, \lambda, \iota, \eta, H_i, L) \to (A, \lambda, \iota, \eta, H_i)$ et $p_2 :\ (A, \lambda, \iota, \eta, H_i, L) \to (A/L, \iota', \lambda', \eta', \mathrm{Im}\ (H_i \to (A/L)[p]))$, où $\iota' : O_F \to \mathrm{End}(A/L)$ est induit par ι, $\lambda' : A/L \to (A/L)^t$ est induit par $p \cdot \lambda$, et η' est induit par η. Soit C^{an} l'analytifié de C_K, et X^{an} l'analytifié de X_K. On note encore p_1, p_2 les morphismes $C^{an} \to X^{an}$. On note $C_{rig} = p_1^{-1}(X_{rig})$; c'est le lieu de bonne réduction, et on a également $C_{rig} = p_2^{-1}(X_{rig})$.

Définition 1.2.5. L'opérateur de Hecke ensembliste sur X_{rig} est défini sur chaque partie S de X_{rig} comme $U_p(S) = p_2 p_1^{-1}(S)$.

Remarque 1.2.6.
- Celui-ci envoie les parties finies dans les parties finies, les ouverts Zariski dans les ouverts Zariski, et les ouverts admissibles quasi-compacts dans les ouverts admissibles quasi-compacts.
- Si $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in X_{rig}$, l'ensemble des points de $U_p(x)$ est donc en bijection avec les sous-groupes L de $A[p]$, totalement isotropes et stables par l'action de O_F, tels que L et H_g soient des supplémentaires dans $A[p]$ sur K.

Dans la suite, nous appellerons simplement « supplémentaire générique » de H_g un tel L. L'opérateur de Hecke augmente le degré. Plus précisément, on a :

Proposition 1.2.7. *Soient K_1 une extension finie de K, $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in X_{rig}(K_1)$ et $y \in\ U_p(x)$. Alors deg $(x) \leq$ deg (y) ; de plus si deg $(x) =$ deg (y), alors*
- *H_g est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon* 1.
- *il existe une extension finie K_2 de K_1, et un sous-groupe $H' \subset A_{O_{K_2}}[p]$, de hauteur dg et stable par O_F, tels que H_g et H' soient en somme directe dans $A_{O_{K_2}}[p]$.*
- *deg $(H') = dg-$ deg (H_g).*
- *deg (H') et deg (H) sont des entiers.*

Démonstration. Soit H' le supplémentaire générique de H_g associé à y. Il est défini sur une extension finie K_2 de K_1. L'application $H_g \times H' \to A[p]$ est un isomorphisme en fibre générique ; d'après la propriété 1.1.27, on a donc deg $(H_g)+$ deg $(H') \leq dg$. Or $\deg(x) = \deg(H_g)$, et deg $(y) =$ deg $(A[p]/H') = dg-$deg (H'). D'où deg $(x) \leq$ deg (y). Si l'inégalité précédente est une égalité, toujours d'après la propriété 1.1.27, l'application $H_g \times H' \to A[p]$ est isomorphisme, ce qui donne les propriétés énoncées. □

Remarque 1.2.8. On a en particulier $U_p(X_{\geq u}) \subset X_{\geq u}$ pour tout $u \in [0, dg]$.

Comprendre la dynamique de l'opérateur de Hecke U_p revient à distinguer deux cas, suivant que le degré est entier ou non. Le cas où le degré n'est pas un entier est bien compris.

Proposition 1.2.9. *Soit r un entier compris entre 0 et $dg-1$. Soit $0 < \lambda < \mu < 1$ des réels. Alors, il existe un entier N tel que*

$$U_p^N(X_{\geq r+\lambda}) \subset X_{\geq r+\mu}$$

Démonstration. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x_n \in X_{\geq r+\lambda}$ et $y_n \in U_p^n(x_n)$ avec deg $(y_n) < r+\mu$. D'après la proposition précédente, cela entraîne $x_n \in X_{[r+\lambda, r+\mu]}$. Or cet espace est quasi-compact, et l'opérateur U_p augmente strictement la fonction degré sur cet espace. Nous allons montrer que l'augmentation du degré peut être minorée par un élément strictement positif. Définissons

$$C_{[r+\lambda, r+\mu]} = p_1^{-1}(X_{[r+\lambda, r+\mu]})$$

De plus, comme dans le preuve de la proposition 1.2.4, il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}_{H_g}$ sur X_{rig}, et une section δ_{H_g} de ce faisceau, tel que $|\delta_{H_g}(x)| = p^{-\deg(x)}$ pour tout point x de X_{rig}. On note encore $\mathcal{L}_{H_g}$ le faisceau inversible sur C_{rig} égal à $p_1^*\mathcal{L}_{H_g}$, et δ_{H_g} la section de ce faisceau égal à $p_1^*\delta_{H_g}$. La norme pour le faisceau $\mathcal{L}_{H_g}$ sur X_{rig} donne par transport une norme pour le faisceau $p_1^*\mathcal{L}_{H_g}$ sur C_{rig}, d'après la proposition 1.1.15. De même, à l'aide de la projection p_2, on définit le faisceau $\mathcal{L}_{H_g'} = p_2^*\mathcal{L}_{H_g}$, la section $\delta_{H_g'} = p_2^*\delta_{H_g}$, ainsi que le sous-faisceau des fonctions de norme inférieure ou égale à 1. Ainsi, si K_1 est une extension finie de K, et x un K_1-point de C_{rig}, correspondant à un couple $(A\lambda, \iota, \eta, H_i)$ défini sur O_{K_1}, ainsi qu'un sous-groupe L de $A[p]$, alors

$$|\delta_{H_g}(x)| = p^{-\deg H_g(x)} \quad \text{et} \quad |\delta_{H_g'}(x)| = p^{-\deg H_g'(x)}$$

où H_g' est l'image de H_g dans A/L. Nous avons vu que $|\delta_{H_g'}| < |\delta_{H_g}|$ sur $C_{[r+\lambda, r+\mu]}$; comme ce dernier espace est quasi-compact, on a $|\delta_{H_g'}| \leq \alpha|\delta_{H_g}|$ avec $\alpha < 1$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, avec

$$\deg(y) \geq \deg(x) + \varepsilon$$

pour tout $x \in X_{[r+\lambda, r+\mu]}$ et $y \in U_p(x)$.
Cela implique donc que $\deg(y_n) \geq n\varepsilon +\deg(x_n) \geq n\varepsilon + r + \lambda$ pour tout n, ce qui est impossible. □

1.2.3 Décomposition de U_p

Sur $X_{]dg-1,dg]}$, l'opérateur de Hecke contracte donc les points vers le lieu ordinaire-multiplicatif. En dehors de cette zone, ce n'est pas le cas : il existe des points x de degré inférieur à $dg-1$ tels que $U_p^n(x)$ ne soit pas inclus dans un voisinage strict du lieu ordinaire multiplicatif fixé pour tout entier n. Nous allons séparer les points de $U_p^n(x)$ suivant qu'ils sont ou non proches du lieu ordinaire multiplicatif.
Pour tout rationnel $\alpha < 1$, nous allons effectuer un découpage de l'ouvert $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\alpha = X_{[0,dg-1+\alpha]}$ qui permettra de décomposer l'opérateur de Hecke.

Définition 1.2.10. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert quasi-compact de X_{rig}. Une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{V}$ est une suite décroissante $(\mathcal{V}_k)_{k\geq 0}$ d'ouverts quasi-compacts, avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_k = \emptyset$ si k est plus grand qu'un certain entier R. La longueur de la suite est le plus petit entier R vérifiant cette propriété.

Nous allons donc découper l'ouvert $\mathcal{U}$ suivant le nombre de « mauvais » supplémentaires génériques, c'est-à-dire ceux de degré plus grand que 1. En effet, si on quotiente par un tel supplémentaire, le degré sera toujours inférieur à $dg-1$, et on ne quitte donc pas l'ouvert $\mathcal{U}$.

Définition 1.2.11. Soit β un rationnel avec $0 < \beta < 1$. Pour tout $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in \mathcal{U}$, soit $N(x, \beta)$ le nombre de supplémentaires génériques L de H_g, avec $\deg(L) \geq 1 - \beta$.

Bien sûr la fonction N ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Soit N_{max} le nombre de supplémentaires génériques de H_g dans $A[p]$; alors $N(x, \beta) \leq N_{max}$.

Remarque 1.2.12. Si $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in \mathcal{U}$ et L est un supplémentaire générique de H_g avec $\deg L < 1 - \beta$, alors

$$\deg\,(A[p]/L) = dg - \deg L > dg - 1 + \beta$$

Si $y = (A/L, \iota', \lambda', \eta', H_i')$, alors $\deg\,(y) > dg - 1 + \beta$, soit $y \in X_{>dg-1+\beta}$. Les fonctions $N(\bullet, \beta)$ vont nous servir à compter le nombre de mauvais supplémentaires génériques de H_g.

Définition 1.2.13. Soit $\mathcal{U}_i$ l'espace défini par

$$\mathcal{U}_i := \{x \in \mathcal{U}, N(x, \beta) \geq i\}$$

Lemme 1.2.14. *Les $(\mathcal{U}_i)_{i\geq 0}$ forment une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, et que les $(\mathcal{U}_i)$ forment une suite décroissante, avec $\mathcal{U}_i = \emptyset$ si $i > N_{max}$.
Notons pour tout $i \geq 1$ l'espace de modules B_i sur K, dont les S-points sont les couples $(A, \lambda, \iota, \eta, H_k, L_1, \dots, L_i)$, avec $(A, \lambda, \iota, \eta, H_k) \in X_K(S)$, et où les L_k sont des supplémentaires génériques distincts de H_g. Soit $p_i : B_i \to X_K$ la projection d'oubli des L_j ; on note B_i^{an} l'analytifié de B_i et $B_{i,rig} = p_i^{-1}(X_{rig})$.

Soit $B_{i,\beta}$ le sous-espace de $B_{i,rig}$ formé des $(A,\lambda,\iota,\eta,H_k,L_j)$ avec $(A,\lambda,\iota,\eta,H_k) \in \mathcal{U}$ et deg $(L_j) \geq 1-\beta$ pour tout $1 \leq j \leq i$. C'est un ouvert quasi-compact de $B_{i,rig}$, et $\mathcal{U}_i$ est l'image par le morphisme fini et étale p_i de $B_{i,\beta}$, donc $\mathcal{U}_i$ est un ouvert quasi-compact de $\mathcal{U}$, d'après la proposition 1.1.17. □

Proposition 1.2.15. *Soit $0 \leq i \leq N_{max}$. Sur $\mathcal{U}_i \backslash \mathcal{U}_{i+1}$, on a $N(x,\beta) = i$, et on peut décomposer la correspondance géométrique de Hecke sur cet ensemble en $U_p = U_{p,i}^{good} \coprod U_{p,i}^{bad}$, où $U_{p,i}^{bad}$ correspond aux i supplémentaires L de degré supérieur ou égal à $1-\beta$.*

Démonstration. Justifions que cette correspondance est bien finie et étale. Rappelons que la correspondance de Hecke utilise l'espace rigide C_{rig} paramétrant les couples $(A,\lambda,\iota,\eta,H_k,L)$ avec $(A,\lambda,\iota,\eta,H_k)$ un point de X_{rig} et L supplémentaire générique de H_g. On dispose de deux morphismes finis et étales $p_1, p_2 : C_{rig} \to X_{rig}$, où p_1 est défini par l'oubli de L et p_2 par le quotient par L. Notons $X_i = \mathcal{U}_i \backslash \mathcal{U}_{i+1}$, $D_i = p_1^{-1}(X_i)$ et $D_{i,\beta} \subset D_i$ le lieu (ouvert) défini par deg $(L) \geq 1-\beta$. Alors l'immersion ouverte $D_{i,\beta} \to D_i$ est quasi-compacte, et les fibres géométriques de $p_1 : D_{i,\beta} \to X_i$ sont de cardinal constant (égal à i). D'après la proposition 1.1.21, les restriction de p_1 à $D_{i,\beta}$ et $D_i \backslash D_{i,\beta}$ sont finies et étales.
De plus, les morphismes $p_2 : D_{i,\beta} \to X_{rig}$ et $p_2 : D_i \backslash D_{i,\beta} \to X_{rig}$ sont étales car les immersions ouvertes le sont. On peut donc décomposer sur X_i l'opérateur U_p en $U_p = U_{p,i}^{good} \coprod U_{p,i}^{bad}$, où $U_{p,i}^{bad}$ est obtenu à partir de la restriction de p_1 et p_2 à $D_{i,\beta}$, et où $U_{p,i}^{good}$ est obtenu en restreignant p_1 et p_2 à $D_i \backslash D_{i,\beta}$. □

Remarque 1.2.16.
- Pour $i=0$, on a sur $\mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_1$, $U_{p,0}^{bad} = \emptyset$, et $U_p = U_{p,0}^{good}$.
- Pour $i = N_{max}$, on a sur $\mathcal{U}_{N_{max}}$, $U_{p,N_{max}}^{good} = \emptyset$ et $U_p = U_{p,N_{max}}^{bad}$, c'est-à-dire que tous les supplémentaires sont mauvais.
- L'image de $U_{p,i}^{good}$ est incluse dans $X_{>dg-1+\beta}$, et l'image de $U_{p,i}^{bad}$ est incluse dans $X_{\leq dg-1+\beta}$ pour tout i.

Nous aurons également besoin de faire surconverger les ouverts $\mathcal{U}_i$. Soit β' un rationnel avec $\beta < \beta' < 1$.

Définition 1.2.17. On définit l'ouvert $\mathcal{U}'_i$ par

$$\mathcal{U}'_i := \{x \in \mathcal{U}, N(x,\beta') \geq i\}$$

La suite d'ouverts $(\mathcal{U}'_i)$ vérifie alors les mêmes propriétés que celles de $(\mathcal{U}_i)$; en particulier on peut également décomposer l'opérateur de Hecke sur $\mathcal{U}'_i \backslash \mathcal{U}'_{i+1}$, qui coïncide avec la décomposition de U_p sur $(\mathcal{U}_i \backslash \mathcal{U}_{i+1}) \cap (\mathcal{U}'_i \backslash \mathcal{U}'_{i+1}) = \mathcal{U}_i \backslash (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}'_{i+1})$.

Proposition 1.2.18. *Pour tout $i \geq 1$, $\mathcal{U}'_i$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_i$.*

Démonstration. Nous reprenons les notations des deux démonstrations précédentes. Nous avons un morphisme fini étale $p_i : B_{i,rig} \to X_{rig}$. De plus, $\mathcal{U}_i = p_i(B_{i,\beta})$ et $\mathcal{U}'_i = p_i(B_{i,\beta'})$. Montrons que $B_{i,\beta'}$ est un voisinage strict de $B_{i,\beta}$ dans $p_i^{-1}(\mathcal{U})$.

Rappelons que B_i paramètre les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_k, L_1, \dots, L_i)$, où les L_j sont des supplémentaires génériques de H_g deux à deux distincts. L'ouvert quasi-compact $B_{i,\beta}$ est défini par les conditions $(A, \lambda, \iota, \eta, H_k) \in \mathcal{U}$ et deg $L_j \geq 1 - \beta$ pour tout $1 \leq j \leq i$. Ces dernières conditions sont équivalentes à $|\delta_{L_j}(x)| \leq p^{-1+\beta}$, où δ_{L_j} est la section du fibré inversible associé à L_j.
On en déduit donc que le recouvrement $(B_{i,\beta'}, p_i^{-1}(\mathcal{U})\backslash B_{i,\beta})$ est admissible puisque $\beta' > \beta$, soit que $B_{i,\beta'}$ est un voisinage strict de $B_{i,\beta}$.
Le morphisme p_i étant fini et étale, $\mathcal{U}_i'$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_i$ d'après la proposition 1.1.20. □

1.2.4 Décomposition de U_p^N

Dans la section précédente, nous avons découpé l'ouvert $\mathcal{U}$ suivant le nombre de mauvais supplémentaires, et avons ainsi décomposé la correspondance de Hecke en chaque point de $\mathcal{U}$ en $U_p = U_p^{good} + U_p^{bad}$, avec U_p^{good} d'image incluse dans $X_{>dg-1+\beta}$, et U_p^{bad} d'image incluse dans $X_{\leq dg-1+\beta}$. Il est possible d'itérer cette correspondance, et de décomposer la correspondance de Hecke d'ordre p^N, U_p^N. On rappelle que l'on s'est donné un rationnel $\alpha < 1$ et que $\mathcal{U} = X_{[0,dg-1+\alpha]}$.

Théorème 1.2.19. *Soit $N \geq 1$ et β un rationnel avec $0 < \beta < 1$. Il existe un ensemble fini totalement ordonné S_N (qui sera défini par récurrence), indépendant de α et β, et une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{U}_i(N))_{i \in S_N}$ de $\mathcal{U} = X_{[0,dg-1+\alpha]}$ de longueur $L = L(N)$ indépendante de α et β, tels que pour tout $i \geq 0$, on peut décomposer la correspondance U_p^N sur $\mathcal{U}_i(N)\backslash\mathcal{U}_{i+1}(N)$ en*

$$U_p^N = \left(\coprod_{k=0}^{N-1} U_p^{N-1-k} \circ T_k \right) \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{p,i,N}^{good}$, pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_k \in S_{N-k}} U_{p,i_k,N}^{good} U_{p,i_{k-1},i_k,N}^{bad} \dots U_{p,i,i_1,N}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_{N-1} \in S_1} U_{p,i_{N-1},N}^{bad} U_{p,i_{N-2},i_{N-1},N}^{bad} \dots U_{p,i,i_1,N}^{bad}$$

avec

- *les images des opérateurs $U_{p,j,N}^{good}$ $(j \in S_k)$ sont incluses dans $X_{>dg-1+\beta}$*
- *les opérateurs $U_{p,i,j,N}^{bad}$ $(i \in S_k,\ j \in S_{k-1})$ et $U_{p,j,N}^{bad}$ $(j \in S_1)$ sont obtenus en quotientant par un sous-groupe L de degré supérieur ou égal à $1 - \beta$, et ont donc leurs images incluses dans $X_{\leq dg-1+\beta}$.*

Enfin, si β' est un autre rationnel avec $\beta < \beta' < 1$, et si $(\mathcal{U}_i'(N))$ est la bonne suite d'ouverts obtenue pour β', alors $\mathcal{U}_i'(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_i(N)$ pour tout i.

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence, ce qui permettra de construire explicitement les ensembles S_k ainsi que les différents opérateurs intervenant dans la preuve.
Pour $N = 1$, le résultat est démontré dans le paragraphe précédent. Remarquons que l'on a $S_1 = \{0, 1, \dots, N_{max}\}$. Supposons le résultat vrai pour $N \geq 1$ et démontrons le pour $N + 1$.
Soient donc $\alpha < 1$, $\mathcal{U} = X_{[0,dg-1+\alpha]}$. Dans le paragraphe précédent, nous avons décomposé sur chaque cran de la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ l'opérateur U_p en $U_p^{good} \coprod U_p^{bad}$, où l'image de U_p^{good} est incluse dans $X_{>dg-1+\beta}$, et l'opérateur U_p^{bad} est obtenu en quotientant par des sous-groupes de degré supérieur ou égal à $1 - \beta$. L'image de U_p^{bad} est donc incluse dans $X_{[0,dg-1+\beta]} =: \mathcal{V}$.
On peut appliquer le théorème au rang N à $\mathcal{V}$: il existe une suite décroissante d'ouverts quasi-compacts $(\mathcal{V}_i)_{i \in S_N}$ de $\mathcal{V}$, avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$, $\mathcal{V}_{L+1} = \emptyset$ si $L + 1$ est le cardinal de S_N, et une décomposition de $U_{p,i}^N$ sur $\mathcal{V}_i \backslash \mathcal{V}_{i+1}$ pour $i \in S_N$.
Nous devons maintenant découper l'ouvert $\mathcal{U}$, suivant non seulement le nombre de mauvais supplémentaires, mais également suivant l'image dans $\mathcal{V}$ de ces mauvais supplémentaires. Ainsi, nous allons compter le nombre de supplémentaires, non plus dans $\mathcal{V}$ (c'est ce qui a été fait pour la décomposition de U_p), mais dans chaque cran $\mathcal{V}_i \backslash \mathcal{V}_{i+1}$.
Soit S_{N+1} l'ensemble des suites décroissantes d'entiers positifs ou nuls $N_{max} \geq m_0 \geq \cdots \geq m_L$, où $L + 1$ est le cardinal de S_N. On posera $m_{-1} = N_{max}$. L'ensemble S_{N+1} s'identifie donc à l'ensemble des fonctions sur S_N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, décroissantes et majorées par N_{max}. C'est bien un ensemble fini ; de plus, nous pouvons ordonner cet ensemble par l'ordre lexicographique : si $\underline{n} = (n_i)$ et $\underline{m} = (m_i)$ sont deux telles suites distinctes, et si i est le premier indice tel que $n_i \neq m_i$, on dit que $\underline{n} < \underline{m}$ si $n_i < m_i$.
Si $\underline{m} = (m_i)$, le successeur de $\underline{m}$ est alors défini de la façon suivante : soit $i \geq -1$ le plus grand entier tel que $m_i > m_{i+1}$ (qui existe bien si $\underline{m}$ n'est pas la suite constante égale à N_{max}), alors

$$\underline{m} + 1 = (m_0, \dots, m_i, m_{i+1} + 1, 0, \dots, 0)$$

Définissons maintenant la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$. Pour tout $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_k) \in \mathcal{U}$ et $i \in S_N$, soit $N_i(x)$ le nombre de supplémentaires génériques L de H_g avec $y_L = (A/L, \iota', \lambda', \eta', \mathrm{Im}(H_k \to (A/L)[p])) \in \mathcal{V}_i$. Remarquons que le fait que y_L appartienne à $\mathcal{V}_i$ implique que deg $(y_L) \leq dg - 1 + \beta$, soit deg $(L) \geq 1 - \beta$. En particulier, les fonctions N_i sont bornées par N_{max}. De plus, $N_i(x)$ est également le cardinal de $U_p(x) \cap \mathcal{V}_i$.
Soit

$$\mathcal{U}_{\underline{m}} := \bigcap_{j \in S_N} \left(\bigcup_{i<j} \{x \in \mathcal{U}, N_i(x) \geq m_i + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_j(x) \geq m_j\} \right)$$

Si $\underline{m} = (N_{max}, \dots, N_{max})$, définissons $\mathcal{U}_{\underline{m}+1}$ comme étant l'ensemble vide.
Avant de poursuivre la démonstration du théorème, démontrons quelques propriétés de ces ensembles.

Lemme 1.2.20. *Pour tout $\underline{m} \in S_{N+1}$, $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ est un ouvert quasi-compact.*

Démonstration. Les intersections et unions intervenant dans la définition de $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ étant finies, il suffit de montrer que $\mathcal{U}_{k,l} := \{x \in \mathcal{U}, N_l(x) \geq k\}$ est un ouvert quasi-compact de $\mathcal{U}$.
Soit B_k^0 le sous-espace de $B_{k,rig}$ paramétrant un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_j, L_1, \ldots, L_k)$ avec $(A, \lambda, \iota, \eta, H_j) \in \mathcal{U}$ et $L_1, \ldots, L_k$ des supplémentaires génériques distincts de H_g. On dispose du morphisme d'oubli des L_j, $p : B_k^0 \to \mathcal{U}$, ainsi que d'un morphisme $q : B_k^0 \to X_{rig}^k$, la j-ième composante étant donnée par le quotient par L_j. Alors

$$\mathcal{U}_{k,l} = p(q^{-1}(\mathcal{V}_l^k))$$

Comme $\mathcal{V}_l$ est un ouvert quasi-compact, et que p et q sont finis et étales, $\mathcal{U}_{k,l}$ est également un ouvert quasi-compact. □

De plus, il n'est pas difficile de voir que la suite $(\mathcal{U}_{\underline{m}})$ est décroissante, donc définit une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$. Décomposons maintenant la correspondance de Hecke sur chacune des crans.

Lemme 1.2.21. *Pour tout $\underline{m} \in S_{N+1}$, et $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, on a $N_i(x) = m_i$*

Démonstration. Si $\underline{m}$ est égal à la suite constante égale à N_{max}, le résultat est clair, car les fonctions N_i sont bornées par N_{max}.
Soit $k \geq -1$ le plus grand entier tel que $m_k > m_{k+1}$. On a donc $m_j = m_{k+1}$ pour tout $j > k+1$.
Définissons pour $j \in S_N$

$$R_j = \bigcup_{i<j} \{x \in \mathcal{U}, N_i(x) \geq m_i + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_j(x) \geq m_j\}$$

Soit $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$: il est donc dans R_j pour tout $j \in S_N$. De plus, $\mathcal{U}_{\underline{m}+1}$ est l'intersection des R_j pour $j \leq k$ et de

$$\bigcup_{i<k+1} \{x \in \mathcal{U}, N_i(x) \geq m_i + 1\} \cup \{x \in \mathcal{U}, N_{k+1}(x) \geq m_{k+1} + 1\}$$

Comme $x \notin \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, il n'est pas dans ce dernier ensemble et on a $N_i(x) \leq m_i$ pour $i \leq k+1$. De plus, pour $i > k+1$, on a $N_i(x) \leq N_{k+1}(x) \leq m_{k+1} = m_i$, donc $N_i(x) \leq m_i$ pour tout $i \in S_N$.
Le fait que x soit dans R_i donne alors $N_i(x) = m_i$ pour tout $i \in S_N$. □

Finissons maintenant la démonstration du théorème 1.2.19. Soit $\underline{m} \in S_{N+1}$; alors pour tout $x \in \mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, il y a exactement m_i points dans $U_p(x) \cap \mathcal{V}_i$, pour tout $i \in S_N$. Il y a donc $m_i - m_{i+1}$ points dans $U_p(x) \cap (\mathcal{V}_i \backslash \mathcal{V}_{i+1})$, et $N_{max} - m_0$ points dans $U_p(x) \cap (X_{rig} \backslash \mathcal{V}_0)$. On peut alors décomposer l'opérateur de Hecke sur $\mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$ en

$$U_p = U_{p,\underline{m}}^{good} \coprod_{i \in S_N} U_{p,\underline{m},i}^{bad}$$

où l'opérateur $U^{good}_{p,\underline{m}}$ correspond aux $N_{max} - m_0$ points dans $X_{rig} \backslash \mathcal{V}_0 = X_{>dg-1+\beta}$ et $U^{bad}_{p,\underline{m},i}$ aux $m_i - m_{i+1}$ points dans $\mathcal{V}_i \backslash \mathcal{V}_{i+1}$. En effet, d'après la proposition 1.1.21, sur $\mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$, on peut décomposer l'opérateur U_p en $U^{good}_{p,\underline{m}} \coprod U^{bad}_{p,\underline{m}}$, où $U^{good}_{p,\underline{m}}$ correspond aux $N_{max} - m_0$ points dans $X_{rig} \backslash \mathcal{V}_0$ et $U^{bad}_{p,\underline{m}}$ aux m_0 points dans $\mathcal{V}_0$. En appliquant à nouveau la proposition 1.1.21, on voit qu'on peut décomposer $U^{bad}_{p,\underline{m}}$ en $U^{bad}_{p,\underline{m},0} \coprod \widetilde{U^{bad}_{p,\underline{m},0}}$, où $U^{bad}_{p,\underline{m},0}$ correspond aux $m_0 - m_1$ points dans $\mathcal{V}_0 \backslash \mathcal{V}_1$ et $\widetilde{U^{bad}_{p,\underline{m},0}}$ aux m_1 points dans $\mathcal{V}_1$. En itérant ce processus, on obtient bien la décomposition de U_p annoncée.
Or par récurrence, nous avons une décomposition de U_p^N sur $\mathcal{V}_i \backslash \mathcal{V}_{i+1}$, ce qui donne une décomposition de U_p^{N+1} sur $\mathcal{U}_{\underline{m}} \backslash \mathcal{U}_{\underline{m}+1}$.
L'opérateur $U^{good}_{p,\underline{m}}$ est bien d'image incluse dans $X_{>dg-1+\beta}$, et les opérateurs $U^{bad}_{p,\underline{m},i}$ correspondent à des supplémentaires de degré supérieur ou égal à $1-\beta$, donc ont leur image incluse dans $X_{\leq dg-1+\beta}$.
Enfin, il possible de faire surconverger la décomposition précédente en prenant $\beta < \beta' < 1$, auquel cas $\mathcal{V}' = X_{[0,dg-1+\beta']}$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}$. Par récurrence $\mathcal{V}'_i$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_i$ pour tout i, et on obtient donc que $\mathcal{U}'_{\underline{m}}$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_{\underline{m}}$ pour tout $\underline{m}$, où $(\mathcal{U}'_{\underline{m}})$ est la bonne suite d'ouverts obtenue pour β'.

□

Nous avons décomposé l'opérateur U_p^N sur chaque cran de la suite d'ouverts en utilisant par récurrence la décomposition obtenue pour U_p^{N-1}. Il est en fait possible d'obtenir une autre suite d'ouverts en utilisant uniquement l'opérateur U_{p^N}, qui est égal à U_p^N. Rappelons la définition de cet opérateur.
Soit $C_{N,K}$ l'espaces de modules sur K dont les S-points sont les couples $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i, L)$ où $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in X_K(S)$, et L est un sous-groupe de $A[p^N]$ de rang Ndg, totalement isotrope, stable par l'action de O_F et disjoint de H_g. On dispose de deux morphismes p_1 et p_2 de $C_{N,K}$ vers X_K : p_1 est l'oubli de L et p_2 est le quotient par L. On note C_N^{an} l'analytifié de $C_{N,K}$, et $C_{N,rig} = p_1^{-1}(X_{rig})$.

Définition 1.2.22. L'opérateur de Hecke géométrique U_{p^N} agissant sur les parties de X_{rig} est défini par $S \to p_2(p_1^{-1}(S))$.

On vérifie alors facilement que $U_{p^N}(S) = U_p^N(S)$ pour toute partie S de X_{rig}. On peut alors appliquer les résultats de la section précédente en remplaçant l'opérateur U_p par U_{p^N}. On obtient le résultat suivant.

Théorème 1.2.23. *Soit β un rationnel compris entre 0 et 1. Il existe une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{V}_i(N))_i$ de longueur N_{max}^N, tel que si $x \in \mathcal{V}_i(N) \backslash \mathcal{V}_{i+1}(N)$, le cardinal de $U_{p^N}(x) \cap X_{\leq dg-1+\beta}$ est égal à i. Sur $\mathcal{V}_i(N) \backslash \mathcal{V}_{i+1}(N)$, on peut décomposer l'opérateur U_{p^N} en*

$$U_{p^N} = U^{good}_{p^N,i} \coprod U^{bad}_{p^N,i}$$

où $U^{good}_{p^N,i}$ a son image incluse dans $X_{>dg-1+\beta}$, et $U^{bad}_{p^N,i}$ a son image incluse dans $X_{\leq dg-1+\beta}$. Si $\beta' > \beta$ est un autre rationnel, et si $(\mathcal{V}_i(N)')_i$ est la suite d'ouverts obtenue pour β', alors $\mathcal{V}_i(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_i(N)$ pour tout i.

Démonstration. La construction est entièrement analogue à celle effectuée dans le paragraphe précédent, en remplaçant l'opérateur U_p par U_{p^N}. □

Le lien entre les deux suites d'ouverts, et les décompositions de U_p^N est fait dans la proposition suivante.

Proposition 1.2.24. *Soit β un rationnel avec $0 < \beta < 1$, et soit $(\mathcal{U}_i(N))_{i \in S_N}$ et $(\mathcal{V}_i(N))_{0 \leq i \leq N_{max}^N}$ les deux bonnes suites d'ouverts obtenues précédemment. Alors sur $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N)$, le cardinal de $U_{p^N}(x) \cap X_{\leq dg-1+\beta}$ est constant ; on a donc $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N) \subset \mathcal{V}_j(N) \backslash \mathcal{V}_{j+1}(N)$ pour un certain entier j. On a de plus*

$$U_{p^N,j}^{good} = \coprod_{k=0}^{N-1} U_p^{N-1-k} \circ T_k$$

$$U_{p^N,j}^{bad} = T_N$$

avec les notations précédentes pour T_k et T_N, cette égalité étant vraie sur $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N)$.

Démonstration. Le fait que sur un cran $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N)$ le nombres de mauvais supplémentaires soit constant découle de la construction : ce nombre est égal à

$$\sum_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_{N-1} \in S_1} N_{i_{N-1}} N_{i_{N-2}, i_{N-1}} \dots N_{i, i_1}$$

où $N_{i_k, i_{k+1}}$ est le nombre de points de $U_{p, i_k, i_{k+1}, N}^{bad}$.
L'égalité des décompositions provient du fait que tous les opérateurs « good » ont leur image incluse dans $X_{\leq dg-1+\beta}$, tous les opérateurs « bad » ont leur image dans $X_{<dg-1+\beta}$, et que ces espaces sont disjoints. □

La première décomposition de U_p^N est donc plus fine que la seconde. Nous verrons dans la suite que les deux décompositions auront leur utilité.

1.3 Prolongement analytique des formes modulaires de Hilbert-Siegel

1.3.1 Formes modulaires classiques et surconvergentes

Soit le schéma en groupes $\mathcal{G} = Res_{O_{F_p}/\mathbb{Z}_p} GL_g$, B le Borel supérieur, U son radical unipotent, et T son tore maximal. Soit $X(T)$ le groupe des caractères de T sur $\overline{K}$.

Remarque 1.3.1. Les $\overline{K}$-points de $\mathcal{G}$ sont $GL_g(\overline{K} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p})$, et $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p}$ s'identifie à $\overline{K}^d$ par le morphisme $x \otimes f \to (x\sigma_i(f))$, où les σ_i sont les éléments de $Hom_{\mathbb{Q}_p}(F_p, \overline{K})$.

À toute famille $\kappa = (k_{j,i})_{1\leq j\leq g, 1\leq i\leq d}$, on associe le caractère de T

$$(x_1 \otimes f_1, \dots, x_g \otimes f_g) \to \prod_{i,j} (x_j \sigma_i(f_j))^{k_{j,i}}$$

L'application précédente donne donc un isomorphisme $(\mathbb{Z}^g)^d \simeq X(T)$.

Notation : Si $\kappa = (k_{j,i})$ correspond à un caractère, on note $\kappa' = (-k_{g+1-j,i})$.

Définition 1.3.2. Soit R un anneau sur O_{F_p}, $A \to \text{Spec } R$ une variété abélienne de dimension g, et e sa section unité. Soit $\omega : (R \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p})^g \to e^*\Omega^1_{A/R}$ une trivialisation du faisceau conormal relatif à la section unité. On définit l'action de $\mathcal{G}(R)$ sur ω par $g.\omega = \omega \circ g^{-1}$.

Dans la suite, nous fixons un poids $\kappa \in X(T)$, avec $k_{1,i} \geq \dots \geq k_{g,i}$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

Définition 1.3.3. Une forme modulaire de Siegel-Hilbert F de niveau $\Gamma^0(p)$ sur X de poids $\kappa \in X(T)$ est une loi qui à toute O_K-algèbre R, tout R-point $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i)$ de X, et toute trivialisation $\omega : (R \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p})^g \to e^*\Omega^1_{A/R}$ associe un élément de R noté $F(x, \omega)$, avec de plus les propriétés suivantes :

- Cette loi est fonctorielle en R.
- Cette loi vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall t \in T(R), u \in U(R), F(x, \omega \circ tu) = \kappa'(t) F(x, \omega)$$

Définition 1.3.4. Soit $\mathcal{T} = \text{Isom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p})^g, e^*\Omega^1_{A/X})$, où A est la variété universelle au-dessus de X. C'est un torseur sur X sous le groupe $\mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$. Si $\kappa \in X(T)$; on définit $\omega^\kappa := \phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$, où $\phi : \mathcal{T} \to X$ est la projection, et $\phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$ désigne le sous-faisceau de $\phi_* O_{\mathcal{T}}$ où $B = TU$ agit par le caractère κ' sur T et le caractère trivial sur U. C'est le faisceau des formes modulaires de poids κ, et il est localement libre.

Proposition 1.3.5. *Une forme modulaire de poids κ à coefficients dans une O_K-algèbre C est donc une section globale de ω^κ, soit un élément de $H^0(X \times Spec\ C, \omega^\kappa)$.*

L'espace des formes de Hilbert-Siegel de poids κ est $H^0(X, \omega^\kappa)$, et l'espace des formes modulaires sur X_K est $H^0(X_K, \omega^\kappa)$. On note encore ω^κ l'analytifié de ω^κ, qui est un faisceau sur X_{rig}. Faisons de plus l'hypothèse (inoffensive) que $gd > 1$ (le cas $g = d = 1$ correspond au cas de la courbe modulaire, qui est bien connu). Cette hypothèse permet de négliger les pointes dans la définition des formes modulaires, à l'aide d'un principe de Koecher. Rappelons brièvement ce résultat.

Théorème 1.3.6 ([P-S 1] partie 6)**.** *Il existe une compactification toroïdale $\overline{X}$ de X définie sur O_K, dépendant d'un choix combinatoire. Le schéma $\overline{X}$ est propre sur O_K, et* *le faisceau ω^κ s'étend à $\overline{X}$. De plus, on a le principe de Koecher algébrique et rigide, c'est-à-dire*

$$H^0(\overline{X}, \omega^\kappa) = H^0(X, \omega^\kappa) \quad et \quad H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa) = H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$$

où $\overline{X}_{rig}$ désigne l'espace rigide associé à $\overline{X}$.

Puisque le schéma $\overline{X}$ est propre sur O_K, on a de plus par un principe GAGA ([EGA3] partie 5.1) $H^0(\overline{X} \times_{O_K} K, \omega^\kappa) = H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa)$. En résumé, l'espace des formes modulaires est $H^0(X_K, \omega^\kappa) = H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$. Nous pouvons donc bien négliger les pointes dans la définition des formes modulaires. Définissons maintenant l'espace des formes surconvergentes.

Définition 1.3.7. L'espace des formes surconvergentes de poids κ est le module

$$H^0(X_K, \omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ du tube multiplicatif X_{dg} dans X_{rig}.

Une forme modulaire est donc en particulier une forme surconvergente.

Proposition 1.3.8. *Nous avons donc une application injective*

$$H^0(X, \omega^\kappa) \hookrightarrow H^0(X, \omega^\kappa)^\dagger$$

Démonstration. Cela découle de l'unicité du prolongement analytique et du fait que le lieu ordinaire-multiplicatif rencontre toutes les composantes connexes de X. Justifions rapidement cette affirmation : les composantes connexes de X sont les mêmes que celle de la variété sans niveau en p (cela se démontre en passant aux complexes et en utilisant le demi-plan de Poincaré-Siegel). Il suffit ensuite d'utiliser le fait que le lieu ordinaire est dense sur $\mathbb{F}_p$ pour la variété sans niveau (voir [We]). □

Définition 1.3.9. L'image du morphisme précédent est l'espace des formes classiques.

1.3.2 Opérateur de Hecke

Dans les sections précédentes, nous avons défini la correspondance de Hecke ensembliste U_p. Cette correspondance permet de définir un opérateur au niveau des formes modulaires.
Rappelons que l'on a défini l'espace de modules C_K sur K dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i, L)$ avec $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in X(S)$ et L supplémentaire générique de H_g.
Nous avons deux morphismes $p_1, p_2 : C_{rig} \to X_{rig}$: p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L. Notons également $\pi : A \to A/L$ l'isogénie universelle au-dessus de C.
Celle-ci induit un isomorphisme $\pi^* : \omega_{(A/L)/X} \to \omega_{A/X}$, et donc un morphisme $\pi^*(\kappa) : p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X_{rig}, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_p : H^0(U_p(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa) \overset{\pi^*(\kappa)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$$

Définition 1.3.10. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est défini par $U_p := \frac{1}{p^{n_0}}\widetilde{U}_p$ avec $n_0 = \frac{dg(g+1)}{2}$.

Remarque 1.3.11. Cette normalisation optimise l'intégrabilité de l'opérateur de Hecke, comme le montre un calcul sur les q-développements.

Nous avons une description explicite de cet opérateur. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X_{rig}, $f \in H^0(U_p(\mathcal{U}), \omega^\kappa)$, $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_i) \in \mathcal{U}(\overline{K})$ et $\omega \in \omega_{A/\overline{K}}$. Alors

$$(U_p f)(x, \omega) = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_L f(A/L, \iota', \lambda', \eta', \mathrm{Im}(H_i \to (A/L)[p]), \omega')$$

où $\omega' \in \omega_{(A/L)/\overline{K}}$ est définie par $\pi^*\omega' = \omega$, et la somme portant sur les supplémentaires génériques L de H_g.
Nous avons de plus des formules analogues pour les opérateurs $U_{p,i}^{good}$, $U_{p,i}^{bad}$ et $U_{p,i,j}^{bad}$, dans ce cas la somme portera seulement sur certains supplémentaires génériques L de H_g bien déterminés.
Ainsi, avec les notations de 1.2.3 et 1.2.4, on a

$$(U_{p,i}^{good} f)(x, \omega) = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_{\deg L < 1-\beta} f(A/L, \iota', \lambda', \eta', \mathrm{Im}(H_i \to (A/L)[p]), \omega')$$

$$(U_{p,i}^{bad} f)(x, \omega) = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_{\deg L \geq 1-\beta} f(A/L, \iota', \lambda', \eta', \mathrm{Im}(H_i \to (A/L)[p]), \omega')$$

$$(U_{p,,\underline{m},i}^{bad} f)(x, \omega) = \frac{1}{p^{n_0}} \sum_{y \in U_p(x) \cap \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}_{i+1}} f(y, \omega')$$

Remarque 1.3.12. puisque U_p stabilise les $X_{\geq dg-v}$, $v > 0$, lesquels forment une base de voisinages du tube multiplicatif, l'opérateur de Hecke agit sur les formes modulaires surconvergentes.

L'opérateur de Hecke U_p agissant sur les formes modulaires, on peut le munir d'une norme d'opérateur.

Définition 1.3.13. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X_{rig}, et T un des opérateurs de Hecke définis précédemment agissant sur les formes modulaires $H^0(T(\mathcal{U}), \omega^\kappa)$. On définit la norme de $T : H^0(T(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$ par

$$\|T\|_{\mathcal{U}} := \inf\{r > 0, |Tf|_{\mathcal{U}} \leq r|f|_{T(\mathcal{U})}, \forall f \in H^0(T(\mathcal{U}), \omega^\kappa)\}$$

Proposition 1.3.14. *Soit α et β deux rationnels strictement compris entre 0 et 1, et $\mathcal{U} \subset X_{[0,dg-1+\alpha]}$ un ouvert sur lequel est défini un opérateur U_p^{bad}, cet opérateur étant défini pour le rationnel β. Alors*

$$\|U_p^{bad}\|_{\mathcal{U}} \leq p^{n_0-(1-\beta)\inf_i(k_{g,i})}$$

L'opérateur U_p^{bad} ne faisant intervenir que des supplémentaires génériques L avec $\deg L \geq 1 - \beta$, cette proposition découle du lemme suivant.

Lemme 1.3.15. *Soit T un opérateur défini sur un ouvert $\mathcal{U}$, égal à U_p, U_p^{good} ou U_p^{bad}. On suppose que cet opérateur ne fait intervenir que des supplémentaires génériques L avec $\deg L \geq c$, pour un certain $c \geq 0$. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}} \leq p^{n_0 - c \inf_i k_{g,i}}$$

Démonstration. Soient x un point de X_{rig}, correspondant à un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_i)$ défini sur $O_{\overline{K}}$ et L un supplémentaire générique de H_g. Alors le morphisme $\pi : A \to A/L$ donne une suite exacte de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_p}$-modules

$$0 \to \omega_{A/L} \xrightarrow{\pi^*} \omega_A \to \omega_L \to 0$$

En décomposant cette suite exacte selon les éléments de $Hom_{\mathbb{Q}_p}(F_p, \overline{K})$, on obtient

$$0 \to \omega_{A/L,i} \xrightarrow{\pi_i^*} \omega_{A,i} \to \omega_{L,i} \to 0$$

De plus, $v(\det \pi_i^*)$ $=\deg_i L$, où $\deg_i L$ est le degré partiel défini dans la partie 1.1.5.
On en déduit que

$$\|\pi_i^*(\kappa)\| \leq p^{-k_{g,i} \deg_i L}$$

soit que

$$\|\pi^*(\kappa)\| \leq p^{-\sum_i k_{g,i} \deg_i L} \leq p^{-\sum_i \inf_i k_{g,i} \deg_i L} = p^{-\deg L \inf_i k_{g,i}}$$

Le résultat découle alors du fait que $\deg L \geq c$. □

1.3.3 Le théorème de prolongement analytique

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.3.16. *Soit f une forme modulaire surconvergente de poids $\kappa = (k_{g,i} \leq \cdots \leq k_{1,i})$, propre pour U_p avec la valeur propre a_p, et supposons que*

$$v(a_p) + \frac{dg(g+1)}{2} < \inf_{1 \leq i \leq d} k_{g,i}$$

Alors f est classique.

Remarque 1.3.17. le terme $\frac{dg(g+1)}{2}$ est le coefficient de normalisation n de l'opérateur de Hecke, et est égal à la dimension de la variété de Siegel-Hilbert.

Soit donc f une forme modulaire surconvergente propre pour U_p de valeur propre a_p, avec $v(a_p) + \frac{dg(g+1)}{2} < \inf k_{g,i}$. La forme modulaire f est définie sur $X_{\geq dg-\gamma}$, pour un certain $\gamma > 0$. On va prolonger f à X_{rig} tout entier. Par la dynamique de l'opérateur de Hecke (proposition 1.2.9), on peut prolonger f à $X_{>dg-1}$ en utilisant l'équation fonctionnelle

$f = a_p^{-1} U_p f$.
On va prolonger f à $X_{[0,dg-1+\alpha]}$, pour un certain $\alpha > 0$. Pour ce faire, nous allons utiliser la décomposition de la correspondance de l'opérateur U_p^N.
La condition sur le poids va nous garantir que les opérateurs $a_p^{-1} U_p^{bad}$ sont de normes strictement inférieure à 1. En effet, cela résultera de la proposition 1.3.14, et du fait que l'on peut prendre β arbitrairement petit. Soit donc ε tel que

$$\frac{dg(g+1)}{2} + v(a_p) < (1-\varepsilon) \inf k_{g,i}$$

Fixons un rationnel α strictement positif avec $\alpha < \varepsilon$. Dans la partie 1.2.4, nous avons obtenu une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U} = X_{[0,dg-1+\alpha]}$ qui a permis de décomposer l'opérateur de Hecke. Nous allons maintenant utiliser cette décomposition.

Soient $N \geq 1$, $0 < \beta_0 < 1$ un rationnel et $(\mathcal{U}_i)_{i \in S_N}$ la bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ pour le rationnel β obtenue dans la partie 1.2.4. De plus, nous avons vu qu'il était possible de faire surconverger toute suite ainsi construite : soit $\beta^{(k)}$ une suite croissante de rationnels avec $\beta^{(0)} = \beta_0$. Pour tout $k \geq 1$, si $(\mathcal{U}_i^{(k)})$ est la bonne suite d'ouverts obtenus pour $\beta^{(k)}$ de $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}_i^{(k)}$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_i^{(k-1)}$ dans $\mathcal{U}$, pour tout $i \in S_N$. On notera également $\mathcal{U}_i^{(0)} = \mathcal{U}_i$. On suppose également la suite $\beta^{(k)}$ bornée par ε.
Soient alors $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i^{(i-1)}$ pour $i \geq 1$ et $\mathcal{V}_i' = \mathcal{U}_i^{(i)}$ pour $i \geq 0$. Alors $\mathcal{V}_i'$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_i$ pour tout $i \geq 1$.
Nous avons décomposé l'opérateur U_p^N sur $\mathcal{V}_i' \backslash \mathcal{V}_{i+1}$ en

$$U_p^N = \sum_{k=0}^{N-1} U_p^{N-1-k} T_k + T_N$$

avec $T_0 = U_{p,i}^{good}$, et pour $0 < k < N$

$$T_k = \sum_{i_1 \in S_{N-1}, \ldots, i_k \in S_{N-k}} U_{p,i_k}^{good} U_{p,i_{k-1},i_k}^{bad} \ldots U_{p,i,i_1}^{bad}$$

et

$$T_N = \sum_{i_1 \in S_{N-1}, \ldots, i_{N-1} \in S_1} U_{p,i_{N-1}}^{bad} U_{p,i_{N-2},i_{N-1}}^{bad} \ldots U_{p,i,i_1}^{bad}$$

Les images de $U_{p,i}^{good}$ et de U_{p,i_k}^{good} $(i_k \in S_{N-k})$ sont incluses dans $X_{\geq dg-1+\beta^{(i)}} \subset X_{\geq dg-1+\beta_0}$, et les opérateur $U_{p,i,j}^{bad}$, $U_{p,i}^{bad}$ ne font intervenir que des supplémentaires L de degré supérieur ou égal à $1 - \beta^{(i)} > 1 - \varepsilon$.

Définition 1.3.18. Les séries de Kassaei sur $\mathcal{V}_i' \backslash \mathcal{V}_{i+1}$ sont définies par

$$f_{N,i} := a_p^{-1} U_{p,i}^{good} f + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1 \in S_1, \ldots, i_k \in S_k} a_p^{-k-1} U_{p,i,i_1}^{bad} \ldots U_{p,i_{k-1},i_k}^{bad} U_{p,i_k}^{good} f$$

Cette fonction est bien définie, puisque les opérateurs $U^{good}_{p,i}$ sont soit nuls, auquel cas leur action sur f donne 0, soit à valeur dans $X_{\geq dg-1+\beta_0}$ et f est définie sur cet espace. Ce dernier espace étant quasi-compact, f y est bornée, disons par M.
La proposition 1.3.14 permet de majorer la norme des opérateurs $a_p^{-1}U^{bad}_{p,i,j}$: la norme de ces opérateurs est inférieure à

$$u_0 = p^{n_0+v(a_p)-(1-\varepsilon)\inf_i k_{g,i}} < 1$$

Lemme 1.3.19. *Les fonctions $f_{N,i}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. On a

$$|a_p^{-k-1}U^{bad}_{p,i,i_1}\dots U^{bad}_{p,i_{k-1},i_k}U^{good}_{p,i_k}f|_{\mathcal{V}'_i\backslash\mathcal{V}_{i+1}} \leq u_0^k|a_p^{-1}U^{good}_{p,i_k}f|_{U^{bad}_{p,i_{k-1},i_k}\dots U^{bad}_{p,i,i_1}(\mathcal{V}'_i\backslash\mathcal{V}_{i+1})} \leq |a_p^{-1}|p^{n_0}M$$

car la norme de U^{good}_{p,i_k} est majorée par p^{n_0}. On peut donc majorer la fonction $f_{N,i}$ par

$$|f_{N,i}|_{\mathcal{V}'_i\backslash\mathcal{V}_{i+1}} \leq |a_p^{-1}|p^{n_0}M$$

ce qui prouve que les fonctions $f_{N,i}$ sont uniformément bornées. □

Remarque 1.3.20. sur l'espace $\{x, U_p^N(x)\cap\mathcal{U}=\emptyset\}$, on aurait pu définir $f_{N,i}$ par $a_p^{-N}U_p^Nf$. Le fait de définir $f_{N,i}$ comme une série de Kassaei permet cependant de majorer plus facilement cette fonction.

Remarque 1.3.21. Cette démonstration est plus simple que celle utilisée dans d'autres articles (notamment [Ka] et [P-S 1]).

Nous avons donc défini une fonction $f_{N,i}$ sur $\mathcal{V}'_i\backslash\mathcal{V}_{i+1}$. Ces fonctions étant uniformément bornées, nous pouvons supposer qu'elles sont à valeurs entières, c'est-à-dire que ce sont des sections du faisceau $\widetilde{\omega}^\kappa$. Nous allons maintenant les recoller pour définir une fonction sur tout $\mathcal{U}$.

Lemme 1.3.22. *Soient $i,j\in S_N$ et $x\in(\mathcal{V}'_i\backslash\mathcal{V}_{i+1})\cap(\mathcal{V}'_j\backslash\mathcal{V}_{j+1})$. Alors*

$$|(f_{N,i}-f_{N,j})(x)| \leq u_0^NM$$

Démonstration. Nous allons utiliser la décomposition effectuée dans le théorème 1.2.23 pour obtenir une autre définition des séries de Kassaei. Cette décomposition pour le rationnel $\beta^{(i)}$ donne une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{V}_k)_k$, et une décomposition de U_{p^N} sur $\mathcal{V}_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$ pour tout k. Soit k l'entier tel que $x\in\mathcal{V}_k\backslash\mathcal{V}_{k+1}$. Alors on a $f_{N,i}(x) = a_p^{-N}U^{good}_{p^N,k}f(x)$. De même, si $(\mathcal{V}'_k)_k$ est la bonne suite d'ouverts obtenue dans le théorème 1.2.23 pour $\beta^{(j)}$, et si $x\in\mathcal{V}'_l\backslash\mathcal{V}'_{l+1}$, alors $f_{N,j}(x) = a_p^{-N}U^{good}_{p^N,l}f(x)$.
Supposons par exemple que $i<j$. On a alors $\beta^{(i)}<\beta^{(j)}$, et au-dessus de x, l'opérateur $U^{bad}_{p^N,l}$ se décompose en $U^{bad}_{p^N,l}{}' + U^{bad}_{p^N,l}{}''$, l'opérateur $U^{bad}_{p^N,l}{}''$ ayant son image incluse dans $X_{]dg-1+\beta^{(i)},dg-1+\beta^{(j)}]}$. On a alors $f_{N,i}(x)-f_{N,j}(x) = a_p^{-N}U^{bad}_{p^N,l}{}''f(x)$. De plus, la norme de

l'opérateur $a_p^{-N} U^{bad}_{p^N,l}{}''$ est inférieure à u_0^N d'après les calculs sur les normes des opérateurs de Hecke. D'où

$$|(f_{N,i} - f_{N,j})(x)| \leq u_0^N |f|_{U^{bad}_{p^N,l}{}''(x)}$$

De plus, l'ensemble $U^{bad}_{p^N,l}{}''(x)$ étant inclus dans $X_{\geq dg-1+\beta_0}$, on a $|f|_{U^{bad}_{p^N,l}{}''(x)} \leq M$ ce qui donne la majoration. □

Proposition 1.3.23. *Il existe un entier A_N telle que les fonctions $(f_{N,i})_{i \in S_N}$ se recollent en une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \widetilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.*

Démonstration. La décomposition de l'ouvert $\mathcal{U}$ étant finie, soit L tel que $\mathcal{V}_{L+1}$ soit vide. La fonction $f_{N,L}$ est donc définie sur $\mathcal{V}'_L$. La fonction $f_{N,L-1}$ est elle définie sur $\mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L$. De plus, d'après le lemme précédent, on a

$$|f_{N,L-1} - f_{N,L}|_{(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L} \leq u_0^N M$$

Soit A_N tel que $u_0^N M \leq p^{-A_N}$; comme $u_0 < 1$, la suite (A_N) tend vers l'infini.
Les fonctions $f_{N,L-1}$ et $f_{N,L}$ sont donc égales modulo p^{A_N} sur $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L$. Comme $(\mathcal{V}'_L \cap \ \mathcal{V}'_{L-1}, \mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L)$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{V}'_{L-1}$, celles-ci se recollent en une fonction $g_{N,L-1} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-1}, \widetilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
De même, $g_{N,L-1}$ et $f_{N,L-2}$ sont égales (modulo p^{A_N}) sur $(\mathcal{V}'_{L-2} \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_{L-1}$, et donc se recollent en $g_{N,L-2} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-2}, \widetilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
En répétant ce processus, on voit que les fonctions $f_{N,i}$ se recollent toutes modulo p^{A_N} sur $\mathcal{V}'_0 = \mathcal{U}$, et définissent donc une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \widetilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.

□

Proposition 1.3.24. *Les fonctions (g_N) définissent un système projectif dans $\varprojlim H^0(\mathcal{U}, \widetilde{\omega}^\kappa / p^m)$.*

Démonstration. Nous allons prouver que g_{N+1} et g_N sont égales modulo p^{A_N}. Soit $x \in \mathcal{U}$; nous avons construit en x les séries de Kassaei $f_{N,i}$ et $f_{N+1,k}$. Or le terme $f_{N+1,k}$ provient d'une décomposition de U_p^{N+1} du type

$$U_p^{N+1} = \sum_{l=0}^{N} U_p^{N-l} T_N + T_{N+1}$$

Nous pouvons donc écrire $f_{N+1,k} = h_1 + h_2$, la fonction h_1 étant associée à l'opérateur $\sum_{l=0}^{N-1} U_p^{N-1-l} T_N$ et h_2 à T_N.
Or la fonction h_1 est en réalité une série de Kassaei pour une certaine décomposition de U_p^N : le lemme précédent donne donc

$$|(f_{N,i} - h_1)(x)| \leq p^{-A_N}$$

De plus, on a

$$h_2 = \sum_{i_1 \in S_1, \dots, i_N \in S_N} a_p^{-N-1} U^{bad}_{p,i,i_1} \dots U^{bad}_{p,i_{N-1},i_N} U^{good}_{p,i_N} f$$

donc comme les opérateurs $a_p^{-1}U_{p,i,j}^{bad}$ ont une norme inférieure à u_0,

$$|h_2(x)| \leq u_0^N p^{n_0}|a_p^{-1}|M = p^{-A'_N}$$

avec $A'_N = A_N - n_0 - v(a_p)$. Quitte à remplacer A_N par A'_N, on voit donc que la réduction de g_{N+1} modulo p^{A_N} est égal à g_N. □

En utilisant le gluing lemma (lemme 1.1.16), on voit donc que les fonctions g_N définissent une fonction $g \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$. Bien sûr, g se recolle avec f sur $X_{>dg-1}$. En effet, si $x \in X_{>dg-1}$, il existe N_0 tel que $U_p^N(x) \subset X_{\geq dg-1+\varepsilon}$ pour $N \geq N_0$, et la série de Kassaei est alors stationnaire égale à

$$a_p^{-N_0}U_p^{N_0}f$$

Nous avons donc étendu f sur $X_{[0,dg-1+\alpha]}$, pour un certain $\alpha > 0$. Comme le recouvrement $(X_{[0,dg-1+\alpha]}, X_{>dg-1})$ est un recouvrement admissible de X_{rig}, on peut donc prolonger f à tout X_{rig}, ce qui prouve que f est classique.

1.4 Cas des variétés de Shimura de type (C)

Le théorème que nous avons démontré se généralise au cas d'une variété de Shimura PEL de type (C).

1.4.1 Données de Shimura

Rappelons les données paramétrant les variétés de Shimura PEL de type (C) (voir [Ko]). Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. Soit F le centre de B et F_0 le sous-corps de F fixé par $\star$. Le corps F_0 est une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$, soit d son degré. Faisons les hypothèses suivantes :

- $F = F_0$.
- Pour tout plongement $F \to \mathbb{R}$, $B \otimes_F \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et l'involution $\star$ est donnée par $A \to A^t$.

Soit également $(U_\mathbb{Q}, \langle,\rangle)$ un B-module hermitien non dégénéré. Soit G le groupe des automorphismes du B-module hermitien $U_\mathbb{Q}$; pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, on a donc

$$G(R) = \{(g,c) \in GL_B(U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R) \times R^*, \langle gx, gy\rangle = c\langle x,y\rangle \text{ pour tout } x,y \in U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R\}$$

Soient $\tau_1, \dots, \tau_d$ les plongements de F dans $\mathbb{R}$,et $B_i = B \otimes_{F,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $G_\mathbb{R}$ est isomorphe à

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^d \mathrm{Sp}_{2g}\right)$$

où $g = \frac{1}{2nd}\dim_\mathbb{Q} U_\mathbb{Q}$.
Donnons-nous également un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B U_\mathbb{R}$ tel que $\langle h(z)v, w\rangle = \langle v, h(\overline{z})w\rangle$

et $(v, w) \to \langle v, h(i)w \rangle$ est définie positive. Ce morphisme définit donc une structure complexe sur $U_{\mathbb{R}}$: soit $U_{\mathbb{R}}^{1,0}$ le sous-espace de $U_{\mathbb{R}}$ pour lequel $h(z)$ agit par la multiplication par z.
On a alors $U_{\mathbb{R}}^{1,0} \simeq \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{R}^n)^g$ en tant que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$-module.
Soient également un ordre O_B de B stable par par $\star$, et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ tel que l'accouplement $\langle , \rangle$ restreint à $U \times U$ soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous ferons également les hypothèses suivantes :

- $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.
- O_B est un ordre maximal en p.
- L'accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p ; O_B est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module libre. Soit $e_1, \ldots, e_t$ une base de ce module, et

$$\det_{U^{1,0}} = f(X_1, \ldots, X_t) = \det(X_1 \alpha_1 + \cdots + X_t \alpha_t; U_{\mathbb{C}}^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_t])$$

On montre ([Ko]) que f est un polynôme à coefficients algébriques. Le corps de nombres E engendré par ses coefficients est appelé corps réflexe, et est égal à $\mathbb{Q}$ dans le cas (C). De plus, d'après les hypothèses précédentes, p est non ramifié dans F. Soit h le nombre d'idéaux premiers de F au-dessus de p, et d_i le degré résiduel de chacune de ces places. Alors $O_B \otimes \ \mathbb{Z}_p \simeq \ \prod_{i=1}^{h} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, où $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$ est l'anneau des entiers de l'unique extension non ramifiée de degré d_i de $\mathbb{Q}_p$.

1.4.2 Variété de Shimura

Définissons maintenant la variété de Shimura PEL de type (C) associée à G. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p, et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant tous les plongements $F \to \overline{\mathbb{Q}_p}$. On notera O_K l'anneau des entiers de K.

Définition 1.4.1. Soit X sur Spec O_K l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où

- $A \to S$ est un schéma abélien
- $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.
- $\iota : O_B \to \mathrm{End}\ A$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{U^{1,0}}$ et $\det_{Lie(A)}$ sont égaux.
- $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique O_B-linéaire, qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique O_B-linéaire

$$H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_f^p$$

Proposition 1.4.2. *L'espace X est un schéma quasi-projectif sur O_K.*

La condition du déterminant est explicite ; notons St est le $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-module défini par

$$St = \bigoplus_{i=1}^{h} (\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^n)^g$$

où l'action de $O_B \otimes \ \mathbb{Z}_p \simeq \ \prod_{i=1}^h \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$ est l'action standard sur chacun des facteurs. Alors la condition du déterminant est équivalente au fait que $\mathrm{Lie}(A)$ soit isomorphe localement pour la topologie de Zariski à $St \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$ comme $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$-module. On voit donc en particulier que le schéma abélien est de dimension ndg.
Nous allons maintenant définir une structure de niveau Iwahorique sur X.
Soit $\pi_1, \ldots, \pi_h$ les idéaux premiers de F au-dessus de p. Si $A \to S$ est un schéma abélien, on a donc

$$A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^h A[\pi_i^\infty]$$

De plus, les groupes de Barsotti-Tate $A[\pi_i^\infty]$ sont principalement polarisés de dimension nd_ig, et muni d'une action $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$.

Définition 1.4.3. Soit X_{Iw} l'espace de modules sur $\mathbb{Z}_p$ dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ où $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$ et $0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,g}$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats, stables par O_B, et totalement isotropes de $A[\pi_i]$, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur nd_ij, pour tout $1 \leq i \leq h$.

Nous noterons X_{rig} et $X_{Iw,rig}$ les espaces rigides associés respectivement à X et X_{Iw}.

1.4.3 Formes modulaires

Soit A le schéma abélien universel sur X, et soit $e^*\Omega^1_{A/X}$ le faisceau conormal relatif à la section unité de A ; il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $St \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X$ comme $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$-module, où on rappelle que

$$St = \oplus_{i=1}^h (\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^n)^g$$

Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_{O_B \otimes \mathcal{O}_X}(St \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X, e^*\Omega^1_{A/X})$. C'est un torseur sur X sous le groupe

$$M = \left(\prod_{i=1}^h Res_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p} GL_g \right) \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$$

Soit B_M le Borel supérieur de M, U_M son radical unipotent, et T_M son tore maximal. Soit $X(T_M)$ le groupe des caractères de T_M, et $X(T_M)^+$ le cône des poids dominants pour B_M. Si $\kappa \in X(T_M)^+$, on note $\kappa' = -w_0\kappa \in X(T_M)^+$, où w_0 est l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement à T_M.
Soit $\phi : \mathcal{T} \to X$ le morphisme de projection.

Définition 1.4.4. Soit $\kappa \in X(T_M)^+$. Le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa = \ \phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$, où $\phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$ est le sous-faisceau de $\phi_* O_{\mathcal{T}}$ où $B_M = T_M U_M$ agit par κ sur T_M et trivialement sur U_M.

Une forme modulaire de poids κ sur X est donc une section globale de ω^κ, soit un élément de $H^0(X, \omega^\kappa)$. En utilisant la projection $X_{Iw} \to X$, on définit de même le faisceau ω^κ sur X_{Iw}, ainsi que les formes modulaires sur X_{Iw}.

Remarque 1.4.5. Par équivalence de Morita, la catégorie des $M_n(A)$-modules et celle des A-modules sont équivalentes, pour tout anneau A. L'équivalence de catégorie est explicite : à un A-module M, on associe M^n, qui est bien muni d'une action de $M_n(A)$; réciproquement, à un $M_n(A)$-module N, on associe le A-module $E_{1,1}N$, où $E_{1,1}$ est la matrice avec un seul coefficient non nul en position $(1,1)$ égal à 1.
De cette manière, puisque $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \prod_{i=1}^h M_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, et que le faisceau ω_A est isomorphe à $St \otimes \mathcal{O}_X$ comme $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$-module, l'équivalence de Morita associe à ω_A le faisceau de $(\prod_{i=1}^h \mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$-modules défini par $E \cdot \omega_A$, où E est la projection défini par $(E_{1,1})_i \in \prod_{i=1}^h M_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$. Ce faisceau est isomorphe à $(\oplus_{i=1}^h \mathbb{Z}_{p^{d_i}}^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$ comme $(\prod_{i=1}^h \mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$-module.

En utilisant la remarque précédente, on voit qu'une définition équivalente du torseur $\mathcal{T}$ est

$$\mathcal{T} = \prod_{i=1}^h \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}^g \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X, E_i \cdot e^*\Omega^1_{A/X})$$

où E_i est l'élément de $\prod_{j=1}^h M_n(\mathbb{Z}_{p^{d_j}})$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième égal à la matrice $E_{1,1}$. Nous utiliserons très souvent l'équivalence de Morita, ce qui nous permettra de se ramener au cas où $n = 1$ (i.e. au cas où B est simple).

Remarque 1.4.6. Le poids κ d'une forme modulaire est une famille d'entiers

$$\prod_{i=1}^h \prod_{j=1}^{d_i} (k_{1,j,i} \geq \dots \geq k_{g,j,i})$$

Comme dans le cas précédent, nous n'avons pas à nous préoccuper des pointes pour la définition des formes modulaires, car il existe des modèles entiers des compactifications toroïdales.

Théorème 1.4.7 ([P-S 1] partie 6)**.** *Il existe une compactification toroïdale $\overline{X}_{Iw}$ de X_{Iw} définie sur O_K, dépendant d'un choix combinatoire. Le schéma $\overline{X}_{Iw}$ est propre sur O_K, et le faisceau ω^κ s'étend à $\overline{X}_{Iw}$. De plus, on a le principe de Koecher algébrique et rigide, c'est-à-dire $H^0(\overline{X}_{Iw}, \omega^\kappa) = H^0(X_{Iw}, \omega^\kappa)$ et $H^0(\overline{X}_{Iw,rig}, \omega^\kappa) = H^0(X_{Iw,rig}, \omega^\kappa)$ où $\overline{X}_{Iw,rig}$ désigne l'espace rigide associé à $\overline{X}_{Iw}$.*

Définissons maintenant les fonctions degrés.

Définition 1.4.8. Soit i un entier entre 1 et h. On définit la fonction $Deg_i : X_{Iw,rig} \to [0, d_i g]$ par $Deg_i((A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k})) = 1/n \deg H_{i,g}$. On définit également la fonction
$Deg : X_{Iw,rig} \to \prod_{i=1}^h [0, d_i g]$ par $x \to (Deg_i(x))$.

Remarque 1.4.9. Le fait de diviser par n est lié également à l'action de l'algèbre de matrices. En effet, le schéma en groupe $H_{i,g}$ est muni d'une action de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, et donc est isomorphe à n copies de $E_{1,1}H_{i,g}$. La quantité pertinente à étudier n'est donc pas le degré de $H_{i,g}$, mais celui de $E_{1,1}H_{i,g}$ qui est de hauteur $d_i g$. C'est pourquoi nous avons défini la fonction Deg_i comme le degré de $H_{i,g}$ divisé par n, qui est égal au degré de $E_{1,1}H_{i,g}$.

Soit $X_{Iw,rig}^{mult}$ le lieu ordinaire-multiplicatif de $X_{Iw,rig}$; il est égal par définition à $Deg^{-1}(\{d_1 g\} \times \cdots \times \{d_h g\})$. Nous pouvons maintenant définir les formes surconvergentes sur pour X.

Définition 1.4.10. L'ensemble des formes modulaires surconvergentes est défini par

$$H^0(X_{Iw,rig}, \omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ de $X_{Iw,rig}^{mult}$ dans $X_{Iw,rig}$.

1.4.4 Opérateurs de Hecke

Soit $1 \leq i \leq h$. Soit C_i l'espaces des modules sur K dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}, L)$ avec $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}) \in X_{Iw}(S)$ et L un sous-groupe fini et plat de $A[\pi_i]$, stable par O_B, totalement isotrope et supplémentaire de $H_{i,g}$ dans $A[\pi_i]$.
Nous avons deux morphismes $p_1, p_2 : C_i \to X_{Iw,K} = X_{Iw} \times K$: p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L. Il y a a priori une ambiguïté pour définir la projection p_2, car il faut préciser quelle polarisation prendre pour le schéma abélien A/L. Fixons un élément x_i totalement positif de O_F, de valuation π_i-adique 1, et de valuation π_j-adique 0 si $j \neq i$. Alors on définit la polarisation λ' sur A/L comme la polarisation descendue $x_i \cdot \lambda$. C'est bien une polarisation de degré premier à p. Remarquons que dans le cas où il n'y a qu'une seule place au-dessus de p, on peut prendre $x_i = p$ (c'est ce qui était fait dans les paragraphes précédents). Cela prouve que l'opérateur U_p est défini canoniquement, mais qu'en général, les opérateurs géométriques $U_{p,i}$, associés à la place π_i, que nous allons définir ne sont pas canoniques.
Soit C_i^{an} l'analytifié de C_i, et $C_{i,rig} = p_1^{-1}(X_{Iw,rig})$. Nous noterons encore p_1, p_2 les morphismes induits $C_{i,rig} \to X_{Iw,rig}$. L'opérateur de Hecke géométrique est défini par $U_{p,i}(S) = p_2(p_1^{-1}(S))$ pour toute partie S de $X_{Iw,rig}$.
Notons $\pi : A \to A/L$ l'isogénie universelle au-dessus de C_i. Celle-ci induit un isomorphisme $\pi^* : \omega_{(A/L)/X} \to \omega_{A/X}$, et donc un morphisme $\pi^*(\kappa) : p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $X_{Iw,rig}$, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_{p,i} : H^0(U_p(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa) \overset{\pi^*(\kappa)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$$

Définition 1.4.11. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est alors défini par $U_{p,i} = \frac{1}{p^{n_i}} \widetilde{U}_{p,i}$ avec $n_i = \frac{d_i g(g+1)}{2}$.

Remarque 1.4.12. Puisque la définition de la projection p_2 nécessite le choix d'un élément x_i, l'opérateur de Hecke n'est pas défini canoniquement. Il est cependant canonique pour l'action sur les formes modulaires, si on se restreint aux formes invariantes pour l'action d'un certain groupe. Puisque ce problème ne crée pas de difficulté pour nous, nous n'entrons pas dans les détails. Remarquons enfin que les opérateurs $U_{p,i}$ commutent entre eux. En effet, l'opérateur $U_{p,i}U_{p,j}$ est obtenu à partir de l'espace des $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}, L)$, où $L = L_1 \oplus L_2$, avec $L_1 \subset A[\pi_i]$ et $L_2 \subset A[\pi_j]$ comme précédemment. La polarisation sur le schéma abélien A/L est alors la polarisation descendue $(x_i x_j) \cdot \lambda$.

L'opérateur $U_{p,i}$ se comporte bien avec les fonctions degrés.

Proposition 1.4.13. *Soit $x \in X_{Iw,rig}$, et $y \in U_{p,i}(x)$. Alors*
- *Si $j \neq i$, alors $Deg_j(y) = Deg_j(x)$.*
- *$Deg_i(y) \geq Deg_i(x)$.*
- *Si $Deg_i(x) = Deg_i(y)$, alors $Deg_i(x) \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Supposons que x corresponde à un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ défini sur une extension K_1 de K, et que y corresponde à un sous-groupe L de $A[\pi_i]$. Alors, pour tout j, $Deg_j(y) = 1/n \deg(H'_{j,g})$ où $H'_{j,g}$ est l'image de $H_{j,g}$ dans A/L. Si $j \neq i$, alors $H_{j,g}$ et L sont en somme directe dans $A[p]$, ce qui implique que $Deg_j(y) = Deg_j(x)$. Le deuxième point résulte du fait que le morphisme $H_{i,g} \to H'_{i,g}$ est un isomorphisme en fibre générique et des propriétés de la fonction degré.
Supposons maintenant que $Deg_i(x) = Deg_i(y)$. Alors, d'après les propriétés de la fonction degré, cela implique que $H_{i,g}$ et L sont en somme directe dans $A[\pi_i]$, soit que $A[\pi_i] = H_{i,g} \oplus L$. En appliquant le projecteur $E_{1,1}$, on obtient que $E_{1,1}A[\pi_i] = E_{1,1}H_{i,g} \oplus E_{1,1}L$. Or $E_{1,1}A[\pi_i]$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1. Cela implique que $E_{1,1}H_{i,g}$ et $E_{1,1}L$ le sont également, et en particulier leurs degrés sont entiers. □

L'opérateur $U_{p,i}$ augmente donc la i-ième fonction degré, et laisse les autres inchangées. De plus, il augmente strictement la fonction Deg_i, sauf aux points de degrés entiers. Nous avons comme précédemment un résultat de contraction.

Proposition 1.4.14. *Soit r un entier compris entre 0 et $d_i g - 1$. Soit $0 < \lambda < \mu < 1$ des réels. Alors, il existe un entier N tel que*

$$U_{p,i}^N(Deg_i^{-1}([r + \lambda, d_i g])) \subset Deg_i^{-1}([r + \mu, d_i g])$$

Nous avons donc défini h opérateurs agissant sur les formes modulaires. Remarquons également que puisque ces opérateurs augmentent le degré, ils agissent sur les formes surconvergentes.
Enfin, nous pouvons également décomposer les opérateurs de Hecke suivant le nombre de bons ou mauvais supplémentaires. Pour simplifier les notations, nous énonçons le théorème pour $U_{p,1}$. Soit α un rationnel avec $0 < \alpha < 1$, $I_2, \dots, I_h$ des intervalles compacts avec $I_k \subset [0, d_k g]$. On pose $\mathcal{U} = Deg^{-1}([0, d_1 g - 1 + \alpha] \times I_2 \times \cdots \times I_h)$.

Théorème 1.4.15. *Soit $N \geq 1$ et β un rationnel avec $0 < \beta < 1$. Il existe une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{U}_i(N))_{i \in S_N}$ de $\mathcal{U}$, tels que pour tout $i \geq 0$, on peut décomposer la correspondance $U_{p,1}^N$ sur $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N)$ en*

$$U_{p,1}^N = \left(\coprod_{k=0}^{N-1} U_{p,1}^{N-1-k} \circ T_k \right) \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{p,i,N}^{good}$, pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_k \in S_{N-k}} U_{p,1,i_k,N}^{good} U_{p,1,i_{k-1},i_k,N}^{bad} \dots U_{p,1,i,i_1,N}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_{N-1} \in S_1} U_{p,1,i_{N-1},N}^{bad} U_{p,1,i_{N-2},i_{N-1},N}^{bad} \dots U_{p,1,i,i_1,N}^{bad}$$

avec

- *les images des opérateurs $U_{p,1,j,N}^{good}$ $(j \in S_k)$ sont incluses dans $Deg_1^{-1}(]d_1 g - 1 + \beta, d_1 g])$*
- *les opérateurs $U_{p,1,i,j,N}^{bad}$ $(i \in S_k,\ j \in S_{k-1})$ et $U_{p,j,N}^{bad}$ $(j \in S_1)$ sont obtenus en quotientant par un sous-groupe L de degré supérieur ou égal à $n(1-\beta)$, et ont donc leurs images incluses dans $Deg_1^{-1}([0, d_1 g - 1 + \beta])$.*

Enfin, si β' est un autre rationnel avec $\beta < \beta' < 1$, et si $(\mathcal{U}'_i(N))$ est la bonne suite d'ouverts obtenue pour β', alors $\mathcal{U}'_i(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_i(N)$ pour tout i.

Un point clé dans l'étape du prolongement analytique est la majoration de la norme des opérateurs $U_{p,1}^{bad}$.

Proposition 1.4.16. *Soit T un opérateur défini sur un ouvert $\mathcal{U}$, égal à $U_{p,1}$, $U_{p,1}^{good}$ ou $U_{p,1}^{bad}$. On suppose que cet opérateur ne fait intervenir que des supplémentaires génériques L de $H_{g,1}$ avec $\deg L \geq nc$, pour un certain $c \geq 0$. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}} \leq p^{n_1 - c \inf_j k_{g,j,1}}$$

Démonstration. Soient x un point de $X_{Iw,rig}$, correspondant à un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ défini sur $O_{\overline{K}}$ et L un supplémentaire générique de $H_{1,g}$. Alors le morphisme $\pi : A \to A/L$ donne une suite exacte de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_B$-modules

$$0 \to \omega_{A/L} \xrightarrow{\pi^*} \omega_A \to \omega_L \to 0$$

On rappelle que $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \prod_{i=1}^h \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, et on note $E_i = (E_{1,1})_i$ l'élément dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième égale à la matrice $E_{1,1}$. En appliquant le projecteur E_i à la suite précédente on obtient

$$0 \to E_i \omega_{A/L} \xrightarrow{\pi_i^*} E_i \omega_A \to E_i \omega_L \to 0$$

Puisque $L \subset A[\pi_1]$, π_i^* est un isomorphisme si $i \neq 1$. De plus,

$$v(\det \pi_1^*) = \deg E_1 L = 1/n \deg L \geq c$$

Le résultat est alors analogue à la démonstration du lemme 1.3.15. $\square$

1.4.5 Classicité

Énonçons maintenant le théorème de classicité. Soit $\kappa \in X(T_M)^+$; l'élément κ correspond donc à une famille d'entiers

$$\prod_{i=1}^{h}\prod_{j=1}^{d_i}(k_{1,j,i} \geq \cdots \geq k_{g,j,i})$$

Théorème 1.4.17. *Soit f une forme surconvergente de poids $\kappa \in X(T_M)^+$ sur X_{Iw}, propre pour la famille d'opérateurs de Hecke $U_{p,i}$. Supposons que les valeurs propres (a_i) pour ces opérateurs soient non nulles, et que κ vérifie les relations*

$$v(a_i) + \frac{d_i g(g+1)}{2} < \inf_{1\leq j\leq d_i} k_{g,j,i}$$

pour tout $1 \leq i \leq h$. Alors f est classique.

Démonstration. La méthode de démonstration permettant d'étendre le résultat du théorème 1.3.16 à ce cas s'inspire des travaux de Sasaki ([Sa]). Écrivons les différentes étapes de la démonstration.
La forme modulaire surconvergente f est sur un ouvert du type $\mathrm{Deg}^{-1}(\prod_{1\leq i\leq h}[d_ig- \varepsilon, d_ig])$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Nous allons étendre cette forme à $X_{Iw,rig}$ tout entier. Pour cela, nous allons étendre f direction par direction, c'est-à-dire étendre f à $Deg^{-1}([0, d_1g] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig - \varepsilon, d_ig])$. Nous utiliserons pour cela le fait que f est propre pour $U_{p,1}$ et la relation vérifiée par la valeur propre a_1. En utilisant l'opérateur $U_{p,2}$, et en répétant le processus, nous allons prolonger f à $Deg^{-1}([0, d_1g] \times [0, d_2g] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig - \varepsilon, d_ig])$, et ainsi de suite, jusqu'à prolonger f à tout $X_{Iw,rig}$. Détaillons le prolongement dans la première direction.
<u>Étape 1 :</u> Nous étendons la forme modulaire f à l'espace $\mathrm{Deg}^{-1}(]d_1g-1, d_1g]\times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig- \varepsilon, d_ig])$. Nous utilisons pour cela la formule $f = a_1^{-N}U_{p,1}^N f$, et la proposition 1.4.14. Cela permet bien d'étendre f à $\mathrm{Deg}^{-1}(]d_1g - 1, d_1g] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig - \varepsilon, d_ig])$.
<u>Étape 2 :</u> Le théorème 1.4.15 permet de définir les séries de Kassaei sur

$$\mathcal{U} := Deg^{-1}([0, d_1g - 1 + \alpha] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig - \varepsilon, d_ig])$$

où α est un rationnel arbitrairement petit. Le fait que les séries de Kassaei vont converger est assurée par la proposition 1.4.16 et la relation vérifiée par a_1. Cela permet donc d'étendre f à $\mathcal{U}$. En recollant f avec la forme définie sur $Deg^{-1}(]d_1g-1, d_1g]\times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig- \varepsilon, d_ig])$, on voit qu'on peut donc étendre f à $Deg^{-1}([0, d_1g] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_ig - \varepsilon, d_ig])$.
En répétant ce processus, on peut donc étendre f à $X_{Iw,rig}$, c'est-à-dire un élément de $H^0(X_{Iw,rig}, \omega^\kappa)$. Le fait que f est classique provient ensuite du principe de Koecher et de GAGA, en utilisant une compactification toroïdale de X (voir le théorème 1.4.7). $\square$

1.5 Cas des variétés de Shimura de type (A)

La méthode de prolongement analytique utilisée s'adapte à d'autres cas. Dans cette partie, nous nous intéressons aux variétés de Shimura de type (A).

1.5.1 Données de Shimura

Rappelons les données paramétrant les variétés de Shimura PEL de type (A) (voir [Ko]). Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. Soit F le centre de B et F_0 le sous-corps de F fixé par $\star$. Le corps F_0 est une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$, soit d sont degré. Faisons les hypothèses suivantes :

- $[F : F_0] = 2$.
- Pour tout plongement $F_0 \to \mathbb{R}$, $B \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et l'involution $\star$ est donnée par $A \to \overline{A}^t$.

Soit également $(U_\mathbb{Q}, \langle,\rangle)$ un B-module hermitien non dégénéré. Soit G le groupe des automorphismes du B-module hermitien $U_\mathbb{Q}$; pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, on a donc

$$G(R) = \{(g,c) \in GL_B(U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R) \times R^*, \langle gx, gy\rangle = c\langle x,y\rangle \text{ pour tout } x,y \in U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R\}$$

Soient $\tau_1, \dots, \tau_d$ les plongements de F_0 dans $\mathbb{R}$; soit également σ_i et $\overline{\sigma_i}$ les deux plongements de F dans $\mathbb{C}$ étendant τ_i. Le choix de σ_i donne un isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. On a également $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $U_i = U_\mathbb{Q} \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R}$. D'après l'équivalence de Morita, $U_i \simeq \mathbb{C}^n \otimes W_i$, où B_i agit sur le premier facteur et W_i est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La structure anti-hermitienne sur U_i en induit une sur W_i, et on note (a_i, b_i) sa signature.

Remarque 1.5.1. Si on avait choisi l'isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ donné par $\overline{\sigma_i}$, on aurait obtenu le couple (b_i, a_i). Ainsi, on dispose pour chaque plongement τ_i d'un couple d'entiers, défini à permutation près, mais bien défini si on choisit un plongement de F au-dessus de τ_i.

Alors $G_\mathbb{R}$ est isomorphe à

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^d \mathrm{U}(a_i, b_i)\right)$$

où $a_i + b_i$ est indépendant de i et vaut $\frac{1}{2nd}\dim_\mathbb{Q} U_\mathbb{Q}$. Nous noterons cette quantité $a+b$.
Donnons-nous également un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B U_\mathbb{R}$ tel que $\langle h(z)v, w\rangle = \langle v, h(\overline{z})w\rangle$ et $(v,w) \to \langle v, h(i)w\rangle$ est définie positive. Ce morphisme définit donc une structure complexe sur $U_\mathbb{R}$: soit $U_\mathbb{C}^{1,0}$ le sous-espace de $U_\mathbb{C}$ pour lequel $h(z)$ agit par la multiplication par z. On a alors $U_\mathbb{C}^{1,0} \simeq \prod_{i=1}^d (\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$ en tant que $B \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^d \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$-module (l'action de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur $(\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$ est l'action standard sur le premier facteur et l'action conjuguée sur le second) .
Soient également un ordre O_B de B stable par par $\star$, et un réseau U de $U_\mathbb{Q}$ tel que l'accouplement $\langle,\rangle$ restreint à $U \times U$ soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous ferons également les hypothèses suivantes :

– $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.
– O_B est un ordre maximal en p.
– L'accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

Soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p ; O_B est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module libre. Soit $e_1, \dots, e_t$ une base de ce module, et

$$\det_{U^{1,0}} = f(X_1, \dots, X_t) = \det(X_1\alpha_1 + \cdots + X_t\alpha_t; U^{1,0}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_t])$$

On montre ([Ko]) que f est un polynôme à coefficients algébriques. Le corps de nombres E engendré par ses coefficients est appelé le corps réflexe.
De plus, d'après les hypothèses précédentes, p est non ramifié dans F_0. Soient $\pi_1, \dots, \pi_h$ les idéaux de F_0 au-dessus de p, et d_i le degré résiduel de chacune de ces places. Par hypothèse, π_i est non ramifié dans F ; nous sommes donc amenés à distinguer deux cas.
– Nous dirons que π_i est dans le cas 1 si π_i est totalement décomposé dans F. On note dans ce cas π_i^+ et π_i^- les deux idéaux de F au-dessus de π_i.
– Nous dirons que π_i est dans le cas 2 si π_i est inerte dans F.

Nous avons alors $O_B \otimes \ \mathbb{Z}_p \simeq \ \prod_{i=1}^h O_{B,i}$, avec
– si π_i est dans le cas 1, $O_{B,i} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$, où $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$ est l'anneau des entiers de l'unique extension non ramifiée de degré d_i de $\mathbb{Q}_p$.
– si π_i est dans le cas 2, $O_{B,i} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{2d_i}})$.

Soit Σ l'ensemble des plongements de F_0 dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, et Σ_i le sous-ensemble de Σ formé des plongements envoyant π_i dans l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Alors Σ_i est de cardinal d_i, et Σ est l'union disjointe des Σ_i. Si π_i est dans le cas 1, et si $\sigma \in \Sigma_i$, il existe deux plongements de F au-dessus de σ : σ^+ et σ^-, ces plongements étant respectivement au-dessus de π_i^+ et π_i^-. Nous ordonnerons le couple (a_σ, b_σ) de telle sorte que a_σ soit associé à σ^+.

1.5.2 Variété de Shimura

Définissons maintenant la variété de Shimura PEL de type (A) associée à G. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant tous les plongements $F \to \overline{\mathbb{Q}_p}$, et O_K son anneau des entiers. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p.

Définition 1.5.2. Soit X l'espace de modules sur Spec O_K dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où
– $A \to S$ est un schéma abélien
– $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.
– $\iota : O_B \to \mathrm{End}\, A$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{U^{1,0}}$ et $\det_{Lie(A)}$ sont égaux.
– $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique O_B-linéaire, qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique O_B-linéaire

$$H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_f^p$$

Proposition 1.5.3. *L'espace X est un schéma quasi-projectif sur Spec O_K.*

Remarque 1.5.4. Explicitons la condition du déterminant. Notons St_{O_K} est le $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$-module défini par $St_{O_K} = \oplus_{i=1}^h St_{O_K,i}$, où $St_{O_K,i}$ est le $O_{B,i}$-module défini par

$$St_{O_K,i} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_i} (O_K^n)^{a_\sigma} \oplus (O_K^n)^{b_\sigma}$$

où dans le cas 1 l'action de $O_{B,i} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$ est l'action standard sur chacun des facteurs, et dans le cas 2 l'action de $O_{B,i} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{2d_i}})$ est l'action standard, avec $\mathbb{Z}_{p^{2d_i}}$ qui agit par un certain plongement sur le premier facteur, et par son conjugué sur le second (le choix de ce plongement est imposé par l'ordre sur le couple (a_σ, b_σ)). Alors la condition du déterminant est équivalente au fait que Lie(A) soit isomorphe localement pour la topologie de Zariski à $St_{O_K} \otimes_{O_K} \mathcal{O}_S$ comme $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$-module. On voit donc en particulier que le schéma abélien est de dimension $nd(a+b)$.

Nous allons maintenant définir une structure de niveau Iwahorique sur X. Si $A \to S$ est un schéma abélien avec action de O_B, on a donc

$$A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^h A[\pi_i^\infty]$$

Les groupes de Barsotti-Tate $A[\pi_i^\infty]$ sont principalement polarisés de dimension $nd_i(a+b)$, et muni d'une action $O_{B,i}$. De plus, si π_i est dans le cas 1, alors

$$A[p^\infty] = A[(\pi_i^+)^\infty] \oplus A[(\pi_i^-)^\infty]$$

De plus, les groupes $A[(\pi_i^+)^\infty]$ et $A[(\pi_i^-)^\infty]$ sont des Barsotti-Tate de hauteur $d_i(a+b)$ de dimensions respectives $d_i a_i$ et $d_i b_i$, et munis d'une action de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$. Remarquons que ces deux groupes sont duaux l'un de l'autre (cela résulte de la compatibilité entre l'involution de Rosati et la conjugaison complexe).

Définition 1.5.5. Soit X_{Iw} l'espace de modules sur O_K dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ où $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$ et

- si π_i est dans le cas 1, $0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a+b} = A[\pi_i^+]$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats de $A[\pi_i^+]$ stables par O_B, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur $nd_i j$.
- si π_i est dans le cas 2, $0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a+b} = A[\pi_i]$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats de $A[\pi_i]$ stables par O_B, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur $2nd_i j$, avec $H_{i,a+b-j}$ égal à l'orthogonal de $H_{i,j}$.

Nous noterons X_{rig} et $X_{Iw,rig}$ les espaces rigides associés respectivement à X et X_{Iw}.

Remarque 1.5.6. Il pourrait sembler que choisir $A[(\pi_i^+)]$ (au lieu de $A[\pi_i^-]$) dans le cas 1 rompe la symétrie. Il n'en est en fait rien, puisque ces deux groupes sont duaux l'un de l'autre : $A[\pi_i^+] \simeq A[\pi_i^-]^D$. Cette dualité induit donc un accouplement parfait

$$\langle , \rangle : A[\pi_i^+] \times A[\pi_i^-] \to \mathbb{G}_m$$

Si H est un sous-groupe de $A[\pi_i^+]$, on peut donc considérer l'orthogonal de H pour cet accouplement, $H^\perp$, qui est un sous-groupe de $A[\pi_i^-]$. Un drapeau (H_j) de $A[\pi_i^+]$ donne donc par orthogonalité un drapeau $(H_{a+b-j}^\perp)$ de $A[\pi_i^-]$.
Remarquons également que pour tout sous-groupe H de $A[\pi_i^+]$, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A[\pi_i^-] \arrow[r] & A[\pi_i^+]^D \\ H^\perp \arrow[r] \arrow[u] & (A[\pi_i^+]/H)^D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes. D'où $H^\perp \simeq (A[\pi_i^+]/H)^D$.

Remarque 1.5.7. Les schémas X et X_{Iw} sont en fait défini sur le corps réflexe E ; cela résulte du fait que le $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$-module St_{O_K} est en fait défini sur E. Néanmoins, nous devrons nous placer sur O_K pour définir les faisceaux des formes modulaires.

Pour définir les formes modulaires surconvergentes, nous aurons besoin de faire l'hypothèse que le lieu ordinaire de la variété de Shimura est non vide. D'après un résultat de Wedhorn ([We]), cela est équivalent au fait suivant.

Hypothèse. *Nous supposerons que p est totalement décomposé dans le corps réflexe E.*

Cette hypothèse a les conséquences suivantes sur les couples d'entiers (a_i, b_i).

Proposition 1.5.8. *Supposons que π_i soit dans le cas 1. Alors il existe un couple d'entiers (a_i, b_i) tel que $(a_\sigma, b_\sigma) = (a_i, b_i)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_i$. Si π_i est dans le cas 2, alors $a_\sigma = b_\sigma = (a+b)/2$.*

Démonstration. Supposons que π_i soit dans le cas 1. Par hypothèse, il existe un schéma abélien A défini sur une extension finie de O_K tel que le groupe p-divisible $A[\pi_i^\infty]$ soit ordinaire, c'est-à-dire extension d'un groupe multiplicatif par un groupe étale. On en déduit que $A[(\pi_i^+)^\infty]$ est également ordinaire. Or $A[\pi_i^+]$ est muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$, donc d'après la partie 1.1.5, on peut définir ses degrés partiels. Pour tout $\sigma \in \Sigma_i$, on a $\deg_\sigma A[\pi_i^+] = na_\sigma$. Or le degré d'un groupe étale est nul, et si G est un groupe multiplicatif muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^{d_i}}$, tous ses degrés partiels sont égaux. On en déduit que a_σ ne dépend pas de σ. Il existe donc un entier a_i tel que $a_\sigma = a_i$ pour tout $\sigma \in \Sigma_i$. Si $b_i = a + b - a_i$, on a alors $b_\sigma = a + b - a_\sigma = b_i$ pour tout $\sigma \in \Sigma_i$.
Si π_i est dans le cas 2, soit A un schéma abélien défini sur une extension finie de O_K avec $A[\pi_i^\infty]$ ordinaire. Alors $A[\pi_i]$ est muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^{2d_i}}$, et pour tout $\sigma \in \Sigma_i$, si σ_1 et σ_2 sont les deux plongements de F au-dessus de σ, on a $\deg_{\sigma_1} A[\pi_i] = a_\sigma$ et $\deg_{\sigma_2} A[\pi_i] = b_\sigma$, si on suppose que l'entier a_σ est associé à σ_1. Puisque tous les degrés partiels doivent être égaux, on en déduit le résultat. □

Si π_i est dans le cas 2, on notera $a_i = b_i = (a+b)/2$, de telle sorte que pour tout $\sigma \in \Sigma_i$, on a $a_\sigma = a_i$ et $b_\sigma = b_i$ quelque soit le cas.

1.5.3 Formes modulaires

Soit A le schéma abélien universel sur X, et soit $e^*\Omega^1_{A/X}$ le faisceau conormal relatif à la section unité de A. D'après ce qui précède, il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $St \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X$ comme $O_B \otimes \mathcal{O}_X$- module, où $St = \oplus_{i=1}^h St_i$, et St_i est le $O_{B,i}$-module défini par

– $St_i = (\mathbb{Z}^n_{p^{d_i}})^{a_i} \oplus (\mathbb{Z}^n_{p^{d_i}})^{b_i}$ dans le cas 1

– $St_i = (\mathbb{Z}^n_{p^{2d_i}})^{a_i}$ dans le cas 2

Soit

$$\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_{O_B \otimes \mathcal{O}_X}(St \otimes \mathcal{O}_X, e^*\Omega^1_{A/X})$$

C'est un torseur sur X sous le groupe

$$M = \left(\prod_{i \in S_1} Res_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}}/\mathbb{Z}_p}(GL_{a_i} \times GL_{b_i}) \times \prod_{i \in S_2} Res_{\mathbb{Z}_{p^{2d_i}}/\mathbb{Z}_p} GL_{a_i} \right) \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$$

où S_j est l'ensemble des indices i tels que π_i est dans le cas j.
Soit B_M le Borel supérieur de M, U_M son radical unipotent, et T_M son tore maximal. Soit $X(T_M)$ le groupe des caractères de T_M, et $X(T_M)^+$ le cône des poids dominants pour B_M. Si $\kappa \in X(T_M)^+$, on note $\kappa' = -w_0\kappa \in X(T_M)^+$, où w_0 est l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement à T_M.
Soit $\phi : \mathcal{T} \to X$ le morphisme de projection.

Définition 1.5.9. Soit $\kappa \in X(T_M)^+$. Le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa = \phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$, où $\phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$ est le sous-faisceau de $\phi_* O_{\mathcal{T}}$ où $B_M = T_M U_M$ agit par κ sur T_M et trivialement sur U_M.

Une forme modulaire de poids κ sur X est donc une section globale de ω^κ, soit un élément de $H^0(X, \omega^\kappa)$. En utilisant la projection $X_{Iw} \to X$, on définit de même le faisceau ω^κ sur X_{Iw}, ainsi que les formes modulaires sur X_{Iw}.

En utilisant l'équivalence de Morita, une définition équivalente du torseur $\mathcal{T}$ est

$$\mathcal{T} = \prod_{i \in S_1} \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}((\mathbb{Z}^{a_i}_{p^{d_i}} \oplus \mathbb{Z}^{b_i}_{p^{d_i}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X, E_i \cdot e^*\Omega^1_{A/X}) \times \prod_{i \in S_2} \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}_{p^{2d_i}} \otimes \mathcal{O}_X}(\mathbb{Z}^{(a+b)/2}_{p^{2d_i}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_X, E_i \cdot e^*\Omega^1_{A/X})$$

où E_i est l'élément de $\prod_{j=1}^h O_{B,j}$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième égal à la matrice $E_{1,1} \oplus E_{1,1}$ si i appartient à S_1, et égal à la matrice $E_{1,1}$ si $i \in S_2$.

Remarque 1.5.10. Le poids κ d'une forme modulaire est une famille d'entiers

$$\prod_{i=1}^h \prod_{j=1}^{d_i} ((k_{1,j,i} \geq \cdots \geq k_{a_i,j,i}), (l_{1,j,i} \geq \cdots \geq l_{b_i,j,i}))$$

Comme dans les cas précédent, nous n'avons pas à nous préoccuper des pointes pour la définition des formes modulaires, car il existe des modèles entiers des compactifications toroïdales.

Théorème 1.5.11 ([P-S 1] partie 6)**.** *Il existe une compactification toroïdale $\overline{X}_{Iw}$ de X_{Iw} définie sur O_K, dépendant d'un choix combinatoire. Le schéma $\overline{X}_{Iw}$ est propre sur O_K, et le faisceau ω^κ s'étend à $\overline{X}_{Iw}$. De plus, on a le principe de Koecher algébrique et rigide, c'est-à-dire $H^0(\overline{X}_{Iw},\omega^\kappa) = H^0(X_{Iw},\omega^\kappa)$ et $H^0(\overline{X}_{Iw,rig},\omega^\kappa) = H^0(X_{Iw,rig},\omega^\kappa)$ où $\overline{X}_{Iw,rig}$ désigne l'espace rigide associé à $\overline{X}_{Iw}$.*

Définissons maintenant les fonctions degrés.

Définition 1.5.12. Soit i un entier entre 1 et h. On définit la fonction $Deg_i : X_{Iw,rig} \to [0,d_ia_i]$ par $Deg_i((A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k})) = 1/n \deg H_{i,a_i}$. On définit également la fonction $Deg : X_{Iw,rig} \to \prod_{i=1}^h [0,d_ia_i]$ par $x \to (Deg_i(x))$.

Remarque 1.5.13. Ici encore, le fait de diviser par n est lié à l'action de l'algèbre de matrices.

Soit $X^{mult}_{Iw,rig}$ le lieu ordinaire-multiplicatif de $X_{Iw,rig}$; il est égal par définition à

$$Deg^{-1}(\{d_1a_1\} \times \cdots \times \{d_ha_h\})$$

Nous pouvons maintenant définir les formes surconvergentes sur pour X.

Définition 1.5.14. L'ensemble des formes modulaires surconvergentes est défini par

$$H^0(X_{Iw,rig},\omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V},\omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ de $X^{mult}_{Iw,rig}$ dans $X_{Iw,rig}$.

1.5.4 Opérateurs de Hecke

Soit $1 \le i \le h$. Soit C_i l'espaces des modules sur K dont les S-points sont les $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L)$ avec $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k}) \in X_{Iw}(S)$ et

- L un sous-groupe fini et plat de $A[\pi_i^+]$, stable par O_B, et supplémentaire générique de H_{i,a_i} dans $A[\pi_i^+]$ dans le cas 1.
- L un sous-groupe fini et plat de $A[\pi_i]$, stable par O_B, totalement isotrope et supplémentaire générique de H_{i,a_i} dans $A[\pi_i]$ dans le cas 2.

Remarquons que dans le cas 1 $A[\pi_i^-]$ est la somme directe sur K de $H_{i,a_i}^\perp$ et de $L^\perp$, donc que $A[\pi_i]$ est la somme directe sur K de $H_{i,a_i} \oplus H_{i,a_i}^\perp$ et de $L \oplus L^\perp$.
Nous avons deux morphismes $p_1, p_2 : C_i \to X_{Iw,K} = X_{Iw} \times K$: p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L_0, où L_0 est égal à $L \oplus L^\perp$ dans le cas 1 et à L dans le cas 2. Pour définir la projection p_2, nous devons choisir la polarisation sur le schéma abélien A/L. On fixe un élément totalement positif x_i de O_{F_0}, de valuation π_j-adique 1 si $j = i$ et 0 sinon. On définit la polarisation sur A/L comme la polarisation descendue $x_i \cdot \lambda$. Comme décrit dans la remarque 1.4.12, ce choix ne créera pas de difficulté. Nous noterons encore p_1, p_2 les morphismes induits $C_{i,rig} \to X_{Iw,rig}$. Notons également $\pi : A \to A/L_0$ l'isogénie universelle au-dessus de C_i. Celle-ci induit un isomorphisme $\pi^* : \omega_{(A/L_0)/X} \to \omega_{A/X}$, et

donc un morphisme $\pi^*(\kappa): p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $X_{Iw,rig}$, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_{p,i} : H^0(U_p(\mathcal{U}),\omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa) \overset{\pi^*(\kappa)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U},\omega^\kappa)$$

Définition 1.5.15. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est défini par $U_{p,i} = \frac{1}{p^{n_i}}\widetilde{U}_{p,i}$ avec $n_i = d_i a_i b_i$.

Les propriétés vérifiées par les opérateurs $U_{p,i}$ sont les mêmes que dans les parties précédentes.

Proposition 1.5.16. *Soit $x \in X_{Iw,rig}$, et $y \in U_{p,i}(x)$. Alors*
- *Si $j \neq i$, alors $Deg_j(y) = Deg_j(x)$.*
- *$Deg_i(y) \geq Deg_i(x)$.*
- *Si $Deg_i(x) = Deg_i(y)$, alors $Deg_i(x) \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 1.5.17. *Soit r un entier compris entre 0 et $d_i a_i - 1$. Soit $0 < \lambda < \mu < 1$ des réels. Alors, il existe un entier N tel que*

$$U_{p,i}^N(Deg_i^{-1}([r+\lambda, d_i a_i])) \subset Deg_i^{-1}([r+\mu, d_i a_i])$$

Nous avons donc défini h opérateurs agissant sur les formes modulaires. Remarquons également que puisque ces opérateurs augmentent le degré, ils agissent sur les formes surconvergentes.
Enfin, nous pouvons également décomposer les opérateurs de Hecke suivant le nombre de bons ou mauvais supplémentaires. Pour simplifier les notations, nous énonçons le théorème pour $U_{p,1}$. Soit α un rationnel avec $0 < \alpha < 1$, $I_2, \dots, I_h$ des intervalles compacts avec $I_k \subset [0, d_k a_k]$. On pose $\mathcal{U} = Deg^{-1}([0, d_1 a_1 - 1 + \alpha] \times I_2 \times \dots \times I_h)$.

Théorème 1.5.18. *Soit $N \geq 1$ et β un rationnel avec $0 < \beta < 1$. Il existe une bonne suite d'ouverts $(\mathcal{U}_i(N))_{i \in S_N}$ de $\mathcal{U}$, tels que pour tout $i \geq 0$, on peut décomposer la correspondance $U_{p,1}^N$ sur $\mathcal{U}_i(N) \backslash \mathcal{U}_{i+1}(N)$ en*

$$U_{p,1}^N = \left(\coprod_{k=0}^{N-1} U_{p,1}^{N-1-k} \circ T_k \right) \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{p,i,N}^{good}$, pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_k \in S_{N-k}} U_{p,1,i_k,N}^{good} U_{p,1,i_{k-1},i_k,N}^{bad} \dots U_{p,1,i,i_1,N}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{i_1 \in S_{N-1}, \dots, i_{N-1} \in S_1} U_{p,1,i_{N-1},N}^{bad} U_{p,1,i_{N-2},i_{N-1},N}^{bad} \dots U_{p,1,i,i_1,N}^{bad}$$

avec

- *les images des opérateurs* $U^{good}_{p,1,j,N}$ *(*$j \in S_k$*) sont incluses dans* $Deg_1^{-1}(]d_1a_1-1+\beta, d_1a_1])$
- *les opérateurs* $U^{bad}_{p,1,i,j,N}$ *(*$i \in S_k$*,* $j \in S_{k-1}$*) et* $U^{bad}_{p,j,N}$ *(*$j \in S_1$*) sont obtenus en quotientant par un sous-groupe* L *de degré supérieur ou égal à* $n(1-\beta)$*, et ont donc leurs images incluses dans* $Deg_1^{-1}([0, d_1a_1 - 1 + \beta])$*.*

Enfin, si β' *est un autre rationnel avec* $\beta < \beta' < 1$*, et si* $(\mathcal{U}'_i(N))$ *est la bonne suite d'ouverts obtenue pour* β'*, alors* $\mathcal{U}'_i(N)$ *est un voisinage strict de* $\mathcal{U}_i(N)$ *pour tout* i*.*

Nous avons également une majoration de la norme des opérateurs $U^{bad}_{p,1}$.

Proposition 1.5.19. *Soit* T *un opérateur défini sur un ouvert* $\mathcal{U}$*, égal à* $U_{p,1}$*,* $U^{good}_{p,1}$ *ou* $U^{bad}_{p,1}$*. On suppose que cet opérateur ne fait intervenir que des supplémentaires génériques* L *de* $H_{g,1}$ *avec deg* $L \geq nc$*, pour un certain* $c \geq 0$*. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}} \leq p^{n_1 - c(\inf_j(k_{a_1,j,1}+l_{b_1,j,1}))}$$

Démonstration. Soient x un point de $X_{Iw,rig}$, correspondant à un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ défini sur $O_{\overline{K}}$ et L un supplémentaire générique de H_{1,a_1} comme dans le définition des opérateurs de Hecke. Si π_1 est dans le cas 1, alors L est un supplémentaire générique de H_{1,a_1} dans $A[\pi_1^+]$, et on note $L_0 = L \oplus L^\perp$. Si π_1 est dans le cas 2, L est un supplémentaire générique de H_{1,a_1} dans $A[\pi_1]$ et on note $L_0 = L$. Alors le morphisme $\pi : A \to A/L_0$ donne une suite exacte de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_B$-modules

$$0 \to \omega_{A/L_0} \xrightarrow{\pi^*} \omega_A \to \omega_{L_0} \to 0$$

On rappelle que $O_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \prod_{i=1}^h O_{B,i}$, où $O_{B,i}$ est la complétion de O_B en π_i ; $O_{B,i}$ est donc égal respectivement à $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_i}})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{2d_i}})$ si π_i est dans le cas 1 ou 2. Le module ω_A se décompose sous l'action de O_B en $\omega_A = \oplus_{i=1}^h \omega_{A,i}$, et de même pour ω_{A/L_0} et ω_{L_0}. On a donc des suites exactes

$$0 \to \omega_{A/L_0,i} \xrightarrow{\pi_i^*} \omega_{A,i} \to \omega_{L_0,i} \to 0$$

Puisque $L \subset A[\pi_1]$, π_i^* est un isomorphisme si $i \neq 1$. Pour étudier le morphisme π_1^*, nous allons distinguer suivant le fait que π_1 soit dans le cas 1 ou 2. Supposons que π_1 soit dans le cas 1. Alors $O_{B,1} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_1}}) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{d_1}})$, et on note E_1^+ et E_1^- les projecteurs de $O_{B,1}$ égaux respectivement à $(E_{1,1}, 0)$ et $(0, E_{1,1})$. On a donc des suites exactes de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{d_1}}$-modules

$$0 \to E_1^+ \omega_{A/L_0,1} \xrightarrow{\pi_{1,+}^*} E_1^+ \omega_{A,i} \to E_1^+ \omega_{L_0,1} \to 0$$

et de même en remplaçant $+$ par $-$. Ces morphismes se décomposent sous l'action de $\mathbb{Z}_{p^{d_1}}$; pour tout $1 \leq j \leq d_1$, on a des morphismes

$$0 \to (E_1^+ \omega_{A/L_0,1})_j \xrightarrow{\pi_{1,j,+}^*} (E_1^+ \omega_{A,i})_j \to (E_1^+ \omega_{L_0,1})_j \to 0$$

et de même en remplaçant $+$ par $-$. On a alors $v(\det \pi^*_{1,j,+}) = (\deg_j L)/n$, où $\deg_j$ est le degré partiel (voir la partie 1.1.5). De plus, on a

$$v(\det \pi^*_{1,j,-}) = (\deg_j L^\perp)/n = (\deg_j (A[\pi_1^+]/L)^D)/n = (a_1 - (a_1 - \deg_j L))/n = (\deg_j L)/n$$

On en déduit que la norme du morphisme $\omega^\kappa_{A/L_0} \to \omega^\kappa_A$ est majorée par

$$p^{-(\sum_{1\leq j\leq h}(k_{a_1,j,1}\deg_j L + l_{b_1,j,1}\deg_j L))/n} \leq p^{-(\deg L \inf_j(k_{a_1,j,1}+l_{b_1,j,1}))/n} \leq p^{-c\inf_j(k_{a_1,j,1}+l_{b_1,j,1})}$$

Supposons que π_1 soit dans le cas 2. Alors $L = L_0$ est un supplémentaire de H_{1,a_1} dans $A[\pi_1]$ et $O_{B,1} = \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_{p^{2d_1}})$. On a alors une suite exacte de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^{2d_1}}$-modules

$$0 \to E_{1,1}\omega_{A/L,1} \overset{\pi_1'^*}{\to} E_{1,1}\omega_{A,1} \to E_{1,1}\omega_{L,1} \to 0$$

Ces morphismes se décomposent sous l'action de $\mathbb{Z}_{p^{d_1}}$; pour tout $1 \leq j \leq d_1$, on a des morphismes

$$0 \to (E_{1,1}\omega_{A/L,1})_j \overset{\pi^*_{1,j}}{\to} (E_{1,1}\omega_{A,1})_j \to (E_{1,1}\omega_{L,1})_j \to 0$$

Chacun de ces modules se décompose pour l'action de $\mathbb{Z}_{p^{2d_1}}$, et on a deux suites exactes

$$0 \to (E_{1,1}\omega_{A/L,1})^+_j \overset{\pi^*_{1,j,+}}{\to} (E_{1,1}\omega_{A,1})^+_j \to (E_{1,1}\omega_{L,1})^+_j \to 0$$

et de même en remplaçant $+$ par $-$. Soit σ_j le plongement de $\mathbb{Q}_{p^{2d_1}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ associé au signe $+$, et $\overline{\sigma}_j$ celui associé au signe $-$. On a $v(\det \pi^*_{1,j,+}) = (\deg_{\sigma_j} L)/n$ et $v(\det \pi^*_{1,j,-}) = (\deg_{\overline{\sigma}_j} L)/n$. Or le groupe L est totalement isotrope maximal pour l'accouplement de Weil. Étant donné la compatibilité entre l'involution de Rosati et la conjugaison complexe, on a donc $L \simeq (A[\pi_1]/L)^{D,c}$, où c veut dire que l'action de O_B est tordue par la conjugaison complexe. Si σ est un plongement de F_i dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on a donc $\deg_\sigma L = \deg_{\overline{\sigma}}((A[\pi_1]/L)^D) = \deg_{\overline{\sigma}} L$. On en déduit que la norme du morphisme $\omega^\kappa_{A/L} \to \omega^\kappa_A$ est majorée par

$$p^{-(\sum_{1\leq j\leq h}(k_{a_1,j,1}\deg_{\sigma_j} L + l_{b_1,j,1}\deg_{\overline{\sigma}_j} L))/n} \leq p^{-(\deg L \inf_j(k_{a_1,j,1}+l_{b_1,j,1}))/n} \leq p^{-c\inf_j(k_{a_1,j,1}+l_{b_1,j,1})}$$

Dans les deux cas, on obtient la majoration voulue. □

1.5.5 Classicité

Soit $\kappa \in X(T_M)^+$ le poids d'une forme modulaire ; il correspond à une famille d'entiers

$$\prod_{i=1}^{h}\prod_{j=1}^{d_i}((k_{1,j,i} \geq \cdots \geq k_{a_i,j,i}), (l_{1,j,i} \geq \cdots \geq l_{b_i,j,i}))$$

Énonçons maintenant le théorème de classicité pour les variétés de Shimura de type (A).

Théorème 1.5.20. *Soit f une forme surconvergente de poids κ sur X_{Iw}, propre pour la famille d'opérateurs de Hecke $U_{p,i}$. Supposons que les valeurs propres (a_i) pour ces opérateurs vérifient les relations*

$$v(a_i) + d_i a_i b_i < \inf_{1 \leq j \leq d_i} (k_{a_i,j,i} + l_{b_i,j,i})$$

pour tout $1 \leq i \leq h$. Alors f est classique.

Démonstration. La méthode de démonstration est identique à celle des variétés de Shimura de type (C). Ecrivons rapidement les différentes étapes.
La forme modulaire surconvergente f est sur un ouvert du type $\mathrm{Deg}^{-1}(\prod_{1\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Nous allons étendre cette forme à $X_{Iw,rig}$ tout entier. Pour cela, nous allons étendre f direction par direction, c'est-à-dire étendre f à $Deg^{-1}([0, d_1 a_1] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$. Nous utiliserons pour cela le fait que f est propre pour $U_{p,1}$ et la relation vérifiée par la valeur propre a_1. En utilisant l'opérateur $U_{p,2}$, et en répétant le processus, nous allons prolonger f à $Deg^{-1}([0, d_1 a_1] \times [0, d_2 a_2] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$, et ainsi de suite, jusqu'à prolonger f à tout $X_{Iw,rig}$. Détaillons le prolongement dans la première direction.
<u>Étape 1 :</u> Nous étendons la forme modulaire f à l'espace $\mathrm{Deg}^{-1}(]d_1 a_1 - 1, d_1 a_1] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$.
Nous utilisons pour cela la formule $f = a_1^{-N} U_{p,1}^N f$, et la proposition 1.5.17. Cela permet bien d'étendre f à $\mathrm{Deg}^{-1}(]d_1 a_1 - 1, d_1 a_1] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$.
<u>Étape 2 :</u> Le théorème 1.5.18 permet de définir les séries de Kassaei sur $\mathcal{U} := Deg^{-1}([0, d_1 a_1 - 1 + \alpha] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i ai - \varepsilon, d_i a_i])$, où α est un rationnel arbitrairement petit. Le fait que les séries de Kassaei vont converger est assurée par la proposition 1.5.19 et la relation vérifiée par a_1. Cela permet donc d'étendre f à $\mathcal{U}$. En recollant f avec la forme définie sur $Deg^{-1}(]d_1 a_1 - 1, d_1 a_1] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$, on voit qu'on peut donc étendre f à $Deg^{-1}([0, d_1 a_1] \times \prod_{2\leq i\leq h}[d_i a_i - \varepsilon, d_i a_i])$.
En répétant ce processus, on peut donc étendre f à $X_{Iw,rig}$, c'est-à-dire un élément de $H^0(X_{Iw,rig}, \omega^\kappa)$. Le fait que f est classique provient ensuite du principe de Koecher et de GAGA, en utilisant une compactification toroïdale de X (voir le théorème 1.5.11). $\square$

Chapitre 2

Formes modulaires de Hilbert

Ce chapitre est consacré aux variétés et formes modulaires de Hilbert. Contrairement au chapitre précédent, nous ne supposerons plus que le nombre premier p est non ramifié.

2.1 Variété et formes de Hilbert

2.1.1 L'espace de modules

Soit F un corps totalement réel de degré $d \geq 2$; on note O_F son anneau des entiers, $O_F^\times$ le groupe des unités et $O_F^{\times,+}$ le sous-groupe des unités totalement positives. Soit p un nombre premier et $(p) = \prod_{i=1}^g \pi_i^{e_i}$ sa décomposition en idéaux premiers dans F. On notera f_i le degré résiduel de π_i, et $\pi = \prod_i \pi_i$. Soit F_{π_i} la complétion de F suivant l'idéal π_i, et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant la clôture normale des F_{π_i}. On notera O_K l'anneau des entiers de K. Un schéma abélien de Hilbert-Blumenthal (SAHB) sur un schéma S est un schéma abélien A sur S de dimension d muni d'un plongement $O_F \hookrightarrow \mathrm{End}(A)$. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p.

Définition 2.1.1. Soit δ la différente de F, $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F. On note $\mathfrak{c}^+$ le cône des éléments totalement positifs. Soit $Y_\mathfrak{c} \to \mathrm{Spec}\, O_K$ l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des (A, i, ϕ, H) avec :
- $A \to S$ un SAHB.
- $i : \delta^{-1} \otimes_\mathbb{Z} \mu_N \hookrightarrow A[N]$ est une structure de niveau μ_N.
- ϕ est une $\mathfrak{c}$-polarisation, c'est-à-dire que ϕ est un homomorphisme O_F-linéaire $\mathfrak{c} \to P(A)$, où $P(A)$ est l'ensemble des morphismes symétriques $f : A \to A^t$, tel que
  - ϕ envoie $\mathfrak{c}^+$ dans le cône des polarisations
  - ϕ induit un isomorphisme $A \otimes \mathfrak{c} \simeq A^t$.
- H est un sous-groupe de rang p^f de $A[\pi]$ stable par O_F, avec $f = \sum_i f_i$, tel que $H[\pi_i]$ soit de rang p^{f_i} pour tout i.

Comme $A[\pi] = \oplus_i A[\pi_i]$, on a $H = \oplus_i H_i$, avec $H_i = H[\pi_i]$. Pour tout i, H_i est un sous-groupe de rang p^{f_i} de $A[\pi_i]$, avec une action de $O_F/\pi_i \simeq \mathbb{F}_{p^{f_i}}$: c'est un schéma en $\mathbb{F}_{p^{f_i}}$-vectoriel de rang 1, c'est-à-dire un schéma en groupes de Raynaud.

D'après [D-P], on dispose d'un ouvert $Y_{\mathfrak{c}}^R \hookrightarrow Y_{\mathfrak{c}}$ qui est le lieu où le faisceau conormal ω_A du SAHB universel est un $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{c}}}$-module libre de rang 1 (c'est le lieu de Rapoport). Le complémentaire de cet ouvert est un fermé de codimension plus grande que 2 dans $Y_{\mathfrak{c}}$. Pour définir les formes modulaires entières de poids général, nous aurons besoin de modifier la fibre spéciale de $Y_{\mathfrak{c}}$. Nous nous inspirons de [Sa2]. Rappelons que le faisceau conormal de A en sa section unité est un $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{Y_{\mathfrak{c}}}$-module. Commençons par décrire la O_K-algèbre $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} O_K$.
Notons $F_{\pi_i}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans F_{π_i}. Soit également $\Sigma_i = Hom(F_{\pi_i}, \overline{K})$ et $S_i = Hom(F_{\pi_i}^{nr}, \overline{K})$. Soit ϖ_i une uniformisante de F_{π_i}, et $E_i(u)$ le polynôme minimal de ϖ_i sur $F_{\pi_i}^{nr}$ (c'est un polynôme d'Eisenstein de degré e_i). Pour $\sigma \in S_i$, on notera $E_\sigma(u) = \sigma E_i(u)$; c'est un polynôme à coefficients dans O_K. Alors on a

$$O_F \otimes_{\mathbb{Z}} O_K = \bigoplus_{i=1}^{g} O_{F_{\pi_i}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_K = \bigoplus_{i=1}^{g} (O_{F_{\pi_i}}^{nr} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_K)[u]/E_i(u) = \bigoplus_{i=1}^{g} \bigoplus_{\sigma \in S_i} O_K[u]/E_\sigma(u)$$

Si S est un O_K-schéma, et $A \to S$ un SAHB, alors on peut décomposer le faisceau ω_A en

$$\omega_A = \bigoplus_{i=1}^{g} \bigoplus_{\sigma \in S_i} \omega_{A,\sigma}$$

où $\omega_{A,\sigma}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang e_i muni d'une action de $O_K[u]/E_\sigma(u)$, pour tout i et $\sigma \in S_i$.
Pour $\sigma \in S_i$, notons $\sigma_1, \dots, \sigma_{e_i}$ les éléments de Σ_i dont la restriction à $F_{\pi_i}^{nr}$ est σ.

Définition 2.1.2. Soit $X_{\mathfrak{c}}$ l'espace de modules sur O_K dont les S-points sont les couples $(A, i, \phi, H, (\omega_{A,\sigma,j})_{i,\sigma \in S_i, 0 \le j \le e_i})$ avec
- $(A, i, \phi, H) \in Y_{\mathfrak{c}}(S)$
- Pour tout i et $\sigma \in S_i$, le faisceau $\omega_{A,\sigma}$ est muni de la filtration

$$0 = \omega_{A,\sigma,0} \subset \omega_{A,\sigma,1} \subset \cdots \subset \omega_{A,\sigma,e_i} = \omega_{A,\sigma}$$

  tel que
  - pour tout j, $\omega_{A,\sigma,j}$ est localement un $\mathcal{O}_S$-facteur direct stable par O_F de $\omega_{A,\sigma}$ de rang j.
  - pour tout $1 \le j \le e_i$, $\omega_{A,\sigma,j}/\omega_{A,\sigma,j-1}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1, et l'action de O_F sur ce module se factorise par $O_F \to O_{F_{\pi_i}} \stackrel{\sigma_j}{\to} O_K \to \mathcal{O}_S$.

Le foncteur $X_{\mathfrak{c}}$ est représentable par un schéma, que l'on notera encore $X_{\mathfrak{c}}$ ([Sa2]). On dispose d'un morphisme d'oubli $X_{\mathfrak{c}} \to Y_{\mathfrak{c}}$, qui est surjectif. Au-dessus du lieu de Rapoport, c'est un isomorphisme ; en particulier, on a $X_{\mathfrak{c}} \otimes_{O_K} K \simeq Y_{\mathfrak{c}} \otimes_{O_K} K$.
Soit $Cl(F)^+$ le quotient des idéaux fractionnaires par les idéaux engendrés par les éléments totalement positifs, et $\{\mathfrak{c}_i\}$ un ensemble de représentants premiers à p. On note $X = \coprod_i X_{\mathfrak{c}_i}$. On notera $X_K = X \times K$, $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale, et X_{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{X}$.

Remarque 2.1.3. Le schéma $X_\mathfrak{c}$ diffère de $Y_\mathfrak{c}$ par un éclatement. En effet, si x est un point de la fibre spéciale de $Y_\mathfrak{c}$, alors pour tout i et $\sigma \in S_i$, $\omega_{A,\sigma,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y_\mathfrak{c},x}$-module muni d'une action de $\mathbb{F}[X]/(X^{e_i})$, où $\mathbb{F}$ est le corps résiduel de O_K. Il est donc muni d'un endomorphisme ϕ vérifiant $\phi^{e_i} = 0$. Alors $\omega_{A,\sigma,1,x}$ doit être une droite dans le noyau de ϕ. De même, $\omega_{A,\sigma,2,x}$ doit être une droite dans le noyau de ϕ agissant sur $\omega_{A,\sigma,x}/\omega_{A,\sigma,1,x}$. Comme le morphisme $X_\mathfrak{c} \to Y_\mathfrak{c}$ est un isomorphisme en fibre générique, on voit donc que le schéma $X_\mathfrak{c}$ est obtenu par éclatements successifs de points de la fibre spéciale de $Y_\mathfrak{c}$.
Si on note $X_{\mathfrak{c},rig}$ et $Y_{\mathfrak{c},rig}$ les espaces rigides associés respectivement à $X_\mathfrak{c}$ et $Y_\mathfrak{c}$, on en déduit donc que $X_{\mathfrak{c},rig} \simeq Y_{\mathfrak{c},rig}$.

Remarque 2.1.4. Nous aurions pu ajouter dans la définition de $X_\mathfrak{c}$ une condition de filtration pour le faisceau ω_H (ce qui est fait dans [Sa2]). Nous aurions obtenu un espace plus régulier, mais notre définition est suffisante dans notre cadre.

Dans [Fa], Fargues a défini une fonction degré pour les schémas en groupes finis et plats définis sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous utilisons cette fonction pour décrire l'espace rigide X_{rig}.

Définition 2.1.5. On définit la fonction $Deg : X_{rig} \to \prod_{i=1}^g [0, f_i]$ par

$$Deg(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) = (\deg H_i)_{1 \leq i \leq g}$$

où deg est la fonction définie par Fargues dans [Fa].

On notera également $Deg_i : X_{rig} \to [0, f_i]$ la i-ème composante de la fonction Deg. Si $v = (v_1, \ldots, v_g)$, avec $v_i \in [0, f_i]$, on note $X_v = \deg^{-1}(v)$ et $X_{\geq v} = \deg^{-1}(\prod_i [v_i, f_i])$. De même, si $I = \prod_{j=1}^g I_j$, où I_j est un intervalle de $[0, f_j]$, on note $X_I = \deg^{-1} I$.

Proposition 2.1.6. *Si I est un produit d'intervalles, X_I est un ouvert de X_{rig}. Si I est de plus compact à bornes rationnelles, X_I est quasi-compact.*

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 1.2.4. □

Le lieu ordinaire-multiplicatif est $X_{(f_1, \ldots, f_g)}$; c'est le lieu où H est de type multiplicatif.

2.1.2 Formes modulaires de Hilbert

Soit $\Sigma = \mathrm{Hom}(F, \overline{K})$, et $\kappa = (k_\sigma) \in \mathbb{Z}^\Sigma$. Rappelons que pour $1 \leq i \leq g$, on a noté $\Sigma_i = Hom(F_{\pi_i}, \overline{K}) = \{\sigma \in \Sigma, v(\sigma(\pi_i)) > 0\}$, $S_i = Hom(F_{\pi_i}^{nr}, \overline{K})$, et $\sigma_1, \ldots, \sigma_{e_i}$ les éléments de Σ_i dont la restriction à $F_{\pi_i}^{nr}$ est σ, pour tout $\sigma \in S_i$.

Définition 2.1.7. On définit le faisceau inversible ω^κ sur X par

$$\omega^\kappa = \bigotimes_{i=1}^{g} \bigotimes_{\sigma \in S_i} \bigotimes_{j=1}^{e_i} (\omega_{A,\sigma,j}/\omega_{A,\sigma,j-1})^{k_{\sigma_j}}$$

Définition 2.1.8. Une forme de Hilbert de poids κ à coefficients dans une O_K-algèbre C est un élément de $H^0(X \times \text{Spec } C, \omega^\kappa)$.

Remarque 2.1.9. Au-dessus du lieu de Rapoport, le faisceau ω_A est un $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$-module libre de rang 1. Si U est un ouvert de ce lieu, on peut voir une forme modulaire f à coefficients dans O_K comme une loi fonctorielle, qui à un R-point (A, i, ϕ, H) de U (on omet la filtration de ω_A, qui est canonique) et une trivialisation $\omega : (R \otimes_{\mathbb{Z}} O_F) \simeq \omega_A$ associe un élément $f(A, i, \phi, H, \omega) \in R$ tel que pour tout $\lambda \in (R \otimes_{\mathbb{Z}} O_F)^\times$

$$f(A, i, \phi, H, \lambda\omega) = \lambda^{-\kappa} f(A, i, \phi, H, \omega)$$

où $\lambda^{-\kappa} = \prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\lambda)^{-k_\sigma}$.
Si U est un ouvert quelconque de X, on peut voir une forme modulaire f à coefficients dans O_K comme une loi fonctorielle, qui à un R-point $(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j})$ et des isomorphismes de R-modules $\omega_\sigma : R^{e_i} \simeq \omega_{A,\sigma}$ respectant la filtration de $\omega_{A,\sigma}$ pour tout $\sigma \in S_i$, associe un élément $f(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma) \in R$, tel que pour tout couple (l_σ), où l_σ est une matrice triangulaire supérieure de $GL_{e_i}(R)$ pour $\sigma \in S_i$, on ait

$$f(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, l_\sigma\omega_\sigma) = (\prod_{i=1}^{g} \prod_{\sigma \in S_i} \prod_{j=1}^{e_i} \lambda_{\sigma_j}^{-k_{\sigma_j}}) f(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma)$$

où les (λ_{σ_j}) sont les coefficients diagonaux de l_σ.

On note encore ω^κ l'analytifié de de ce faisceau, qui est un faisceau sur X_{rig}. Nous montrerons dans la partie 2.4 que, par GAGA et le principe de Koecher, on a

$$H^0(X_K, \omega^\kappa) = H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$$

Définition 2.1.10. L'espace des formes modulaires surconvergentes de poids κ est défini comme

$$H^0(X_K, \omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ du lieu ordinaire-multiplicatif $X_{(f_1,\dots,f_g)}$ dans X_{rig}.

On dispose d'une application de restriction $H^0(X_K, \omega^\kappa) \to H^0(X_K, \omega^\kappa)^\dagger$. Cette application est injective, et l'image est l'ensemble des formes classiques.

2.1.3 Normes

Nous souhaitons définir une norme sur l'espace des formes modulaires, c'est-à-dire un modèle entier pour le faisceau ω^κ. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X_{rig} et $f \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$. Le faisceau ω^κ étant inversible sur $\mathcal{U}$, on peut définir comme dans [Ka] une élément $|f(x)|$ pour tout $x \in \mathcal{U}$. Rappelons brièvement comment procéder. Soit $x \in \mathcal{U}$ un L-point, où L est une extension finie de K. On a donc un morphisme $x : \mathrm{Spec}\ L \to \mathcal{U}$, qui provient d'un unique morphisme $\tilde{x} : \mathrm{Spf}\ O_L \to \mathfrak{X}$. Alors

$$H^0(\mathrm{Spec}\ L, x^*\omega^\kappa) = H^0(\mathrm{Spf}\ O_L, \tilde{x}^*\omega^\kappa) \otimes_{O_L} L$$

On définit alors une norme $|\cdot|_x$ sur $H^0(\mathrm{Spec}\ L, x^*\omega^\kappa)$ en identifiant $H^0(\mathrm{Spf}\ O_L, \tilde{x}^*\omega^\kappa)$ et les éléments de norme plus petite que 1. Alors on définit $|f(x)| := |x^*f|_x$.

Définition 2.1.11. La norme de f sur $\mathcal{U}$ est définie comme

$$|f|_{\mathcal{U}} := \sup_{x \in \mathcal{U}} |f(x)|$$

Cet élément est a priori infini, mais est fini si $\mathcal{U}$ est quasi-compact. On notera $\tilde{\omega}^{\kappa}$ le faisceau des fonctions de norme plus petite que 1. Rappelons également le lemme suivant, dû à Kassaei ([Ka]), qui prouve qu'une forme modulaire est définie par ses réductions modulo p^n pour tout n.

Lemme 2.1.12. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X_{rig}. On a :*

$$H^0(\mathcal{U}, \omega^{\kappa}) \simeq H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^{\kappa}) \otimes_{O_K} K \simeq \left(\lim_{\leftarrow} H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^{\kappa}/p^n) \right) \otimes_{O_K} K$$

2.2 Opérateurs de Hecke

2.2.1 Définition

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire, et $\mathfrak{m}$ un idéal premier de O_F. On considère la correspondance $C_{\mathfrak{c},\mathfrak{cm}}$ définie sur K comme suit : c'est l'espace de modules dont les R-points sont les $(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, L)$, où $(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) \in (X_{\mathfrak{c}} \times K)(R)$, et L est un sous-groupe de rang $N(\mathfrak{m})$ de $A[\mathfrak{m}]$ stable par O_F et disjoint de H. On dispose de deux projections p_1 et p_2, respectivement sur $X_{\mathfrak{c}} \times K$ et $X_{\mathfrak{cm}} \times K$. La première projection p_1 est l'oubli de L, et la projection p_2 est le quotient par L : $p_2(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, L) = (A/L, i', \phi', H', \omega'_{A,\sigma,j})$, où i', ϕ' sont les structures de niveau et polarisation induites par i et ϕ sur A/L, et H' est l'image de H dans A/L. Rappelons que puisque nous travaillons sur K, la filtration $\omega'_{A,\sigma,j}$ est définie canoniquement.
Notons pour tout i, $\sigma(i)$ l'unique élément tel que $\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}$ soit égal à $\mathfrak{c}_{\sigma(i)}$ dans $Cl(F)^+$, c'est-à-dire qu'il existe un élément x_i totalement positif avec $\mathfrak{c}_i\mathfrak{m} = x_i\mathfrak{c}_{\sigma(i)}$. L'élément x_i est déterminé à un élément de $O_F^{\times,+}$ près, et nous fixerons le choix de ces éléments dans la suite. Le choix de x_i donne un isomorphisme $X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \simeq X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}}$. On peut donc voir la projection $p_2 : C_{\mathfrak{c}_i,\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \to X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \times K$ comme une projection sur $X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}} \times K$. On note $C_{\mathfrak{m}} = \coprod_i C_{\mathfrak{c}_i,\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}}$; d'après ce qui précède, on a donc deux projections $p_1, p_2 : C_{\mathfrak{m}} \to X_K$.
On note encore p_1 et p_2 les morphismes $C_{\mathfrak{m},rig} \to X_{rig}$, où $C_{\mathfrak{m},rig}$ est l'espace rigide associé à $C_{\mathfrak{m}}$.

Définition 2.2.1. L'opérateur de Hecke géométrique $U_{\mathfrak{m}}$, défini sur les parties de X_{rig}, est défini par

$$U_{\mathfrak{m}}(S) = p_2 p_1^{-1}(S)$$

Cette correspondance envoie les parties finies dans les parties finies, les ouverts zariskiens dans les ouverts zariskiens, et les ouverts admissibles quasi-compacts dans les ouverts admissibles quasi-compacts.

Remarque 2.2.2. Pour définir l'opérateur $U_{\mathfrak{m}}$, nous avons eu besoin d'identifier $X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}}$ et $X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}}$ à l'aide d'un élément totalement positif x_i pour tout i, défini à une unité totalement positive près. La définition de cet opérateur dépend donc du choix de ces éléments.

De même, on définit l'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires. Rappelons que la projection $p_2 : C_{\mathfrak{m},rig} \to X_{rig}$ provient des morphismes $C_{\mathfrak{c}_i,\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \to X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \times K$, composés avec les isomorphismes $X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \times K \simeq X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}} \times K$, obtenus grâce aux éléments x_i. De même, l'élément x_i induit un isomorphisme $H^0(X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}}, \omega^\kappa) \simeq H^0(X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}}, \omega^\kappa)$. Cet isomorphisme envoie un élément $f \in H^0(X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}}, \omega^\kappa)$ vers la forme modulaire g définie par $g(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma) = f(A, i, x_i\phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma)$. Les morphismes $H^0(X_{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}} \times K, \omega^\kappa) \simeq H^0(X_{\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}} \times K, \omega^\kappa) \to H^0(C_{\mathfrak{c}_i,\mathfrak{c}_i\mathfrak{m}}, p_2^*\omega^\kappa)$ donnent donc un morphisme $H^0(X_K, \omega^\kappa) \to H^0(C_\mathfrak{m}, p_2^*\omega^\kappa)$ (et un morphisme analogue pour les espaces rigides associés).
Soit $\pi_\mathfrak{m} : A \to A/L$ l'isogénie universelle sur $C_\mathfrak{m}$; elle induit un morphisme $\pi_\mathfrak{m}^* : \omega_{A/L} \to \omega_A$. Or au-dessus de K on a la décomposition du faisceau ω_A en $\omega_A = \oplus_{\tau\in\Sigma}\omega_{A,\tau}$. Pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}^\Sigma$, le morphisme $\pi_\mathfrak{m}^*$ induit donc un morphisme

$$\pi_\mathfrak{m}^\kappa : p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$$

Ce dernier induit donc un morphisme $H^0(\mathcal{V}, p_2^*\omega^\kappa) \to H^0(\mathcal{V}, p_1^*\omega^\kappa)$ pour tout ouvert $\mathcal{V}$ de $C_{\mathfrak{m},rig}$.

Définition 2.2.3. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X_{rig}. L'opérateur de Hecke $U_\mathfrak{m}$ agissant sur les formes modulaires de poids κ est défini par le morphisme composé

$$U_\mathfrak{m} : H^0(U_\mathfrak{m}(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa) \overset{\pi_\mathfrak{m}^\kappa}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa) \overset{N(\mathfrak{m})^{-1}Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$$

Remarque 2.2.4. Le terme $N(\mathfrak{m})^{-1}$ sert à normaliser l'opérateur de Hecke. Il maximise l'intégrabilité de cet opérateur, comme le montre un calcul sur les q-développements.

Remarque 2.2.5. Là encore, la définition de l'opérateur $U_\mathfrak{m}$ dépend des choix des éléments x_i. Néanmoins, si on se restreint aux formes f invariantes sous l'action de $O_F^{\times,+}$ (c'est-à-dire telles que $f(A, i, \varepsilon\phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma) = f(A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}, \omega_\sigma)$ pour tout $\varepsilon \in O_F^{\times,+}$), alors cet opérateur est indépendant du choix des x_i (voir [P-S 3] paragraphe 6 ou [Pi2] paragraphe 1).

Remarque 2.2.6. Si l'idéal $\mathfrak{m}$ est premier à pN, on note en général cet opérateur $T_\mathfrak{m}$. Néanmoins, nous utiliserons ces opérateurs uniquement pour $\mathfrak{m}$ divisant p, ce qui justifie notre notation.

On dispose donc en particulier de g opérateurs de Hecke $U_{\pi_1}, \dots, U_{\pi_g}$.

2.2.2 Propriétés

Ces opérateurs se comportent bien relativement à la fonction Degré.

Proposition 2.2.7. *Soit $1 \le i \le g$, $x \in X_{rig}$ et $y \in U_{\pi_i}(x)$. Soit $(x_1, \dots, x_g) = Deg(x)$, et $(y_1, \dots, y_g) = Deg(y)$. Alors*
- *$y_j = x_j$ pour $j \ne i$.*
- *$y_i \ge x_i$*

De plus, s'il existe $y \in U_{\pi_i}^{e_i}(x)$ avec $Deg(y) = Deg(x)$, alors $x_i \in \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $x = (A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j})$ et L le sous-groupe de $A[\pi_i]$ correspondant à y. Comme L est disjoint de $A[\pi_j]$ pour $j \neq i$, on a un isomorphisme $A[\pi_j] \simeq (A/L)[\pi_j]$. Si on décompose H en $\oplus_k H_k$ avec $H_k \subset A[\pi_k]$ pour $1 \leq k \leq g$, l'image de H_j dans $(A/L)[\pi_j]$ est isomorphe à H_j, donc ont le même degré. Le premier point est donc vérifié.
De plus, L est un supplémentaire générique de H_i dans $A[\pi_i]$. Si on note H_i' l'image de H_i dans $(A/L)[\pi_i]$, on a alors un morphisme $H_i \to H_i'$, qui est un isomorphisme en fibre générique. D'après le corollaire 3 de [Fa], on a deg $H_i \leq$deg H_i', ce qui prouve le second point.
Supposons maintenant qu'il existe $y \in U_{\pi_i}^{e_i}(x)$ avec $Deg(y) = Deg(x)$. Soit L le sous-groupe de $A[\pi_i^{e_i}]$ correspondant à y. On remarque alors que H_i et L sont en somme directe dans $A[\pi_i^{e_i}]$. En effet, l'image H_i' de H_i dans A/L a le même degré que H_i par hypothèse. Comme $H_i' = (H_i + L)/L$, on en déduit par additivité de la fonction degré que deg $(H_i + L)$ =deg H_i'+deg L =deg H_i+deg L. Le morphisme $H_i \times L \to H_i + L$ conserve donc le degré, et est un isomorphisme en fibre générique. D'après [Fa], c'est un isomorphisme. Les groupes H_i et L sont donc en somme directe dans $A[\pi_i^{e_i}]$. En particulier, on a $A[\pi_i] = H_i \oplus L[\pi_i]$.
Si e_i était égal à 1, H_i serait un facteur direct de $A[\pi_i]$, donc de $A[p]$ qui est un BT_1, un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 (c'est-à-dire la p-torsion d'un groupe p-divisible). Le groupe H_i serait donc également un BT_1, et son degré serait entier.
Malheureusement, en général $A[\pi_i]$ n'est pas un BT_1, on sait seulement que $A[\pi_i^{e_i}]$ en est un. Nous allons prouver que le sous-groupe L en est un également. Soit D le module de Dieudonné correspondant à $A[\pi_i^{e_i}] \times \mathbb{F}_q$ (avec $q = p^{f_i}$), que l'on décompose suivant l'action de $\mathbb{F}_q$ en $D = \oplus_{j=1}^{f_i} D_j$. On dispose du Frobenius $F_j : D_j \to D_{j+1}$ et du Verschriebung $V_j : D_{j+1} \to D_j$. Ces applications vérifient $F_j V_j = 0$ et $V_j F_j = 0$. De plus, $A[\pi_i^{e_i}]$ étant un BT_1, on a Im F_j = Ker V_j et Ker F_j = Im V_j. Nous allons montrer que L est un BT_1. Cette propriété est équivalente à ce que $L \times \mathbb{F}_q$ soit un BT_1, soit que Im $F_{j|L}$ = Ker $V_{j|L}$ pour tout j. Or Ker $V_{j|L}$ = Ker $V_j \cap L$ = Im $V_j \cap L$. Nous allons donc montrer que Im $F_{j|L}$ = Im $F_j \cap L$ pour tout j.
Par souci de simplification des écritures, nous supprimons l'indice j ; on a donc des applications $F, V : D \to D$, et D est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2e_i$. On choisit une base $(u_1, \ldots, u_{e_i}, v_1, \ldots, v_{e_i})$ de D de telle sorte que L corresponde à $(u_1, \ldots, u_{e_i})$ et H_i à (v_1). Cela est bien possible, puisque L et H_i sont en somme directe dans $A[\pi_i^{e_i}]$. De plus, on suppose la base de D choisie de telle sorte que la multiplication par π_i envoie u_k sur u_{k-1} et v_k sur v_{k-1}. Le fait que les espaces $(u_1, \ldots, u_k)$ et $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$ soient stables par F, et les isomorphismes $A[\pi_i^{j+k}]/[\pi_i^j] \simeq A[\pi_i^k]$ montrent que la matrice de F

dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{e_i} & 0 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{e_i} \\ & x_1 & \ddots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_2 & & & \ddots & \varepsilon_2 \\ & & & x_1 & & & & 0 \\ & & & & y_1 & y_2 & \cdots & y_{e_i} \\ & & & & & y_1 & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & y_2 \\ & & & & & & & y_1 \end{pmatrix}$$

Soit r l'entier positif tel que $x_1 = \cdots = x_r = 0$ et $x_{r+1} \neq 0$, et s celui vérifiant $y_1 = \cdots = y_s = 0$ et $y_{s+1} \neq 0$. On voit alors que le noyau de F est inclus dans $(u_1, \ldots, u_{e_i}, v_1, \ldots, v_s)$, et est de dimension au plus $r + s$. Or d'après le théorème du rang, et par auto-dualité de $A[\pi_i^{e_i}]$, on a $2e_i =$ dim Ker $F+$ dim Im $F =$dim Ker $F+$ dim Ker $V = 2$ dim Ker F, soit dim Ker $F = e_i$. D'où $r + s \geq e_i$.
On voit de plus qu'il existe $w_1, \ldots, w_{e_i-r}$ dans $(u_1, \ldots, u_{e_i})$ tel que $(u_1, \ldots, u_r, v_1+w_1, \ldots, v_{e_i-r}+ w_{e_i-r})$ soit inclus dans le noyau de F. Par égalité des dimensions, c'est une égalité. Supposons maintenant que $s > e_i - r$. Alors $Fv_{e_i-r+1} \in (u_1, \ldots, u_{e_i-r})$ donc il existe $w_{e_i-r+1} \in (u_1, \ldots, u_{e_i})$ tel que $v_{e_i-r+1} + w_{e_i-r+1}$ soit dans le noyau de F, ce qui est impossible par l'égalité précédente. D'où $s = e_i - r$.
Montrons maintenant que Im $F_{|L} =$ Im $F \cap L$. L'inclusion Im $F_{|L} \subset$ Im $F \cap L$ est évidente. Soit $x \in D$ tel que $Fx \in L$. Rappelons que $L = (u_1, \ldots, u_{e_i})$. D'après ce qui précède, comme $y_{e_i-r+1} \neq 0$, $x \in (u_1, \ldots, u_{e_i}, v_1, \ldots, v_{e_i-r})$ donc $Fx \in (u_1, \ldots, u_{e_i-r}) =$ Im $F_{|L}$. Nous avons donc montré que L est un BT_1, donc en particulier son degré est entier.
Soit $L_k = L[\pi^k]$. On dispose d'isogénies $A \to A/L_1 \to \cdots \to A/L_{e_i} = A/L$; si on note $H_{i,k}$ l'image de H_i dans A/L_k, on voit que la suite (deg $H_{i,k})_k$ est croissante. Or par hypothèse H_i et H_{i,e_i} ont même degré. Les $H_{i,k}$ ont donc le même degré que H_i, et on a pour $0 \leq k < e_i$

$$(A/L_k)[\pi_i] = H_{i,k} \oplus L_{k+1}/L_k$$

donc deg $L_{k+1}/L_k = f_i-$ deg H_i. Cette quantité étant constante, on a donc deg $L_k = \frac{k}{e_i}$ deg L, et deg $H_i = f_i-$deg $L_1 = 1 - \frac{1}{e_i}$ deg $L \in \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$. □

Remarque 2.2.8. La démonstration de la deuxième partie de la proposition est différente de celle dans [Pi2]. Elle donne un résultat plus fort, mais se généralise moins facilement à des variétés plus générales que les variétés de Hilbert.

On voit en particulier que les opérateurs U_{π_i} stabilisent les espaces $X_{\geq v}$, pour $v = (v_j)$ et $v_j \in [0, f_j]$. Ils agissent donc sur les formes modulaires surconvergentes.
De plus, l'opérateur $U_{\pi_i}^{e_i}$ augmente strictement le degré de x si $Deg_i(x) \notin \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$. En réalité, nous avons une proposition plus forte.

Proposition 2.2.9. *Soit $1 \leq i \leq g$, k un entier compris entre 0 et $f_i e_i - 1$, et α, β deux rationnels tels que $\frac{k}{e_i} < \alpha < \beta < \frac{k+1}{e_i}$. Posons $X_{i,\geq u} = Deg_i^{-1}([u, f_i])$, pour tout réel u. Alors il existe un entier N tel que*

$$U_{\pi_i}^N(X_{i,\geq\alpha}) \subset X_{i,\geq\beta}$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_n \in X_{i,\geq\alpha}$ et $y_n \in U_{\pi_i}^n(x_n)$ avec $Deg_i(y_n) < \beta$. D'après la proposition précédente, cela entraîne $x_n \in X_{i,[\alpha,\beta]} := Deg_i^{-1}([\alpha, \beta])$. Or cet espace est quasi-compact ; de plus la fonction $X_{rig} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \to \inf_{y \in U_{\pi_i}^{e_i}(x)} Deg_i(y) - Deg_i(x)$$

est continue, et à valeurs strictement positives sur $X_{i,[\alpha,\beta]}$. On en déduit qu'elle y atteint son minimum, soit qu'il existe $\varepsilon > 0$, avec

$$Deg_i(y) \geq Deg_i(x) + \varepsilon$$

pour tout $x \in X_{i,[\alpha,\beta]}$ et $y \in U_{\pi_i}^{e_i}(x)$.
Cela implique donc que $Deg_i(y_{ne_i}) \geq n\varepsilon + Deg_i(x_{ne_i}) \geq n\varepsilon + \alpha$ pour tout n, ce qui est impossible. □

2.2.3 Décomposition des opérateurs de Hecke

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X_{rig}. Fixons un élément i compris entre 1 et g, et un élément rationnel $r \in [0, f_i]$. On note $X_{i,\leq r} := \{x \in X_{rig}, Deg_i(x) \leq r\}$. Nous voulons stratifier notre ouvert $\mathcal{U}$ suivant le nombre de points de $U_{\pi_i}(x) \cap X_{i,\leq r}$. Pour tout $x = (A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) \in X_{rig}$, soit $N(x, r)$ le nombre de points de $U_{\pi_i}(x) \cap X_{i,\leq r}$. Définissons

$$\mathcal{U}_j := \{x \in \mathcal{U}, N(x, r) \geq j\}$$

Proposition 2.2.10. *Les $(\mathcal{U}_j)$ forment une bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$.*

On renvoie à la définition 1.2.10 pour la définition d'une bonne suite d'ouverts, et au lemme 1.2.14 pour la preuve. Sur $\mathcal{U}_j \backslash \mathcal{U}_{j+1}$, on a $N(x, r) = j$. On peut alors décomposer l'opérateur U_{π_i} en $U_{\pi_i}^{good} \coprod U_{\pi_i}^{bad}$, où $U_{\pi_i}^{bad}$ correspond aux j points de $X_{i,\leq r}$, et $U_{\pi_i}^{good}$ aux autres. Remarquons que $U_{\pi_i}^{bad}$ paramètre les supplémentaires L de H_i avec $\deg L \geq f_i - r$. De plus, il est possible de faire surconverger ces ouverts.

Proposition 2.2.11. *Soit $r' > r$ un nombre rationnel, et $\mathcal{U}'_j := \{x \in \mathcal{U}, N(x, r') \geq j\}$. Alors $\mathcal{U}'_j$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j$ dans $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que le recouvrement $(\mathcal{U}'_j, \mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_j)$ de $\mathcal{U}$ est admissible.*

Démonstration. Voir la proposition 1.2.18. □

Pour $r' > r$, on dispose donc de la décomposition de U_{π_i} sur $\mathcal{U}_j \backslash \mathcal{U}_{j+1}$, ainsi que sur $\mathcal{U}'_j \backslash \mathcal{U}'_{j+1}$. Ces décompositions coïncident sur l'intersection des deux ensembles.
Il est possible de généraliser cette décomposition à $U_{\pi_i}^N$ pour tout entier N.

Théorème 2.2.12. *Soit $N \geq 1$ et $r \in [0, f_i]$ un rationnel. Il existe un ensemble fini totalement ordonné S_N et une suite décroissante d'ouverts quasi-compacts $(\mathcal{U}_j(N))_{i \in S_N}$ de $\mathcal{U}$ de longueur $L = L(N)$ indépendante de $\mathcal{U}$, tels que pour tout $j \geq 0$, on peut décomposer la correspondance $U_{\pi_i}^N$ sur $\mathcal{U}_j(N) \backslash \mathcal{U}_{j+1}(N)$ en*

$$U_{\pi_i}^N = \left(\coprod_{k=0}^{N-1} U_{\pi_i}^{N-1-k} \circ T_k \right) \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{\pi_i,j,N}^{good}$, pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \dots, j_k \in S_{N-k}} U_{\pi_i,j_k,N}^{good} U_{\pi_i,j_{k-1},j_k,N}^{bad} \dots U_{\pi_i,j,j_1,N}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \dots, j_{N-1} \in S_1} U_{\pi_i,j_{N-1},N}^{bad} U_{\pi_i,j_{N-2},j_{N-1},N}^{bad} \dots U_{\pi_i,j,j_1,N}^{bad}$$

avec

- *les images des opérateurs $U_{\pi_i,j,N}^{good}$ ($j \in S_k$) sont incluses dans $X_{i,\geq r} = \{x \in X_{rig}, Deg_i(x) \geq r\}$*
- *les opérateurs $U_{\pi_i,j,l,N}^{bad}$ ($j \in S_k$, $l \in S_{k-1}$) et $U_{\pi_i,j,N}^{bad}$ ($j \in S_1$) sont obtenus en quotientant par un sous-groupe L de degré supérieur à $f_i - r$.*

Enfin, si $(\mathcal{U}'_j(N))$ est la stratification de $\mathcal{U}$ obtenue pour $r' > r$, alors $\mathcal{U}'_j(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j(N)$ dans $\mathcal{U}$ pour tout j.

Démonstration. C'est le théorème 1.2.19. □

2.2.4 Normes

Pour démontrer le théorème de classicité, nous aurons besoin d'un calcul de normes de ces opérateurs de Hecke. Rappelons que la norme d'un opérateur $T : H^0(T(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est défini par

$$\|T\|_{\mathcal{U}} := \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, |Tf|_{\mathcal{U}} \leq \lambda |f|_{T(\mathcal{U})} \forall f \in H^0(T(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \right\}$$

Proposition 2.2.13. *Soit T un opérateur défini sur un ouvert $\mathcal{U}$, égal à U_{π_i}, $U_{\pi_i}^{good}$ ou $U_{\pi_i}^{bad}$. On suppose que cet opérateur ne fait intervenir que des sous-groupes L de $A[\pi_i]$ avec $\deg L \geq c$, pour un certain $c \geq 0$. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}} \leq p^{f_i - c \inf_{\tau \in \Sigma_i} k_\tau}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{m} = \pi_i$, $x = (A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) \in X_{rig}(\overline{K})$ et $L \subset A[\mathfrak{m}]$ un supplémentaire de $H[\mathfrak{m}]$ stable par O_F. Alors le morphisme $\pi_{\mathfrak{m}} : A \rightarrow A/L$ donne une suite exacte de $O_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} O_F$-modules

$$0 \rightarrow \omega_{A/L} \overset{\pi_{\mathfrak{m}}^*}{\rightarrow} \omega_A \rightarrow \omega_L \rightarrow 0$$

En décomposant cette suite exacte selon les éléments de S_k pour tout $1 \leq k \leq g$, on obtient pour $\sigma \in S_k$

$$0 \to \omega_{A/L,\sigma} \overset{\pi^*_{\mathfrak{m},\sigma}}{\to} \omega_{A,\sigma} \to \omega_{L,\sigma} \to 0$$

De plus, $\pi^*_{\mathfrak{m},\sigma}$ est un isomorphisme si $\sigma \notin S_i$, et $\sum_{\sigma\in S_i} v(\det \pi^*_{\mathfrak{m},\sigma})$ =deg L. Puisque l'on travaille avec une variété abélienne définie sur $O_{\overline{K}}$, qui est plat sur O_K, le module $\omega_{A,\sigma}$ est canoniquement filtré par suivant les éléments de Σ_i dont la restriction à $F^{nr}_{\pi_i}$ est σ. La filtration $(\omega_{A,\sigma,j})$ est donc canonique. Rappelons que $\omega_{A,\sigma,j}$ est un $O_{\overline{K}}$-module libre de rang j, qui est un facteur direct de $\omega_{A,\sigma}$, et tel que l'action de O_F sur $\omega_{A,\sigma,j}/\omega_{A,\sigma,j-1}$ se factorise par σ_j. On obtient de même une filtration canonique $\omega_{A/L,\sigma,j}$ de $\omega_{A/L,\sigma}$.
Le morphisme $\pi^*_{\mathfrak{m},\sigma}$ respecte cette filtration ; on note $\lambda_{\sigma,j}$ le déterminant de $\pi^*_{\mathfrak{m},\sigma,j} : \omega_{A/L,\sigma,j}/\omega_{A/L,\sigma,j-1} \to \omega_{A,\sigma,j}/\omega_{A,\sigma,j-1}$. Si u_σ désigne le déterminant de $\pi^*_{\mathfrak{m},\sigma}$, on a donc

$$u_\sigma = \prod_{j=1}^{e_i} \lambda_{\sigma,j}$$

En utilisant les notations de la partie 2.2.1, on veut calculer la norme du morphisme $\pi^\kappa_{\mathfrak{m}} : p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$. Il suffit de calculer cette norme point par point. Or au-dessus de x, la norme de ce faisceau est égal à

$$\|\pi^\kappa_{\mathfrak{m}}\|_x = |\prod_{\sigma\in S_i}\prod_{j=1}^{e_i} \lambda_{\sigma,j}^{k_{\sigma_j}}|$$

En effet, calculer la norme de ce morphisme au-dessus de x revient à calculer la norme du morphisme induit entre les faisceaux définis sur le schéma formel $\mathfrak{X}$ au-dessus de $\tilde{x}$. D'après ce qui précède, ce dernier morphisme est la multiplication par $\prod_{\sigma\in S_i}\prod_{j=1}^{e_i} \lambda_{\sigma,j}^{k_{\sigma_j}}$. On en déduit que

$$\|\pi^\kappa_{\mathfrak{m}}\|_x = p^{-\sum_{\sigma\in S_i}\sum_{j=1}^{e_i} v(\lambda_{\sigma,j})k_{\sigma_j}} \leq p^{-\inf_{\tau\in\Sigma_i} k_\tau \sum_{\sigma\in S_i}\sum_{j=1}^{e_i} v(\lambda_{\sigma,j})}$$

Or $\sum_{j=1}^{e_i} v(\lambda_{\sigma,j}) = v(u_\sigma)$, et $\sum_{\sigma\in S_i} v(u_\sigma)$ =deg L. Puisque le degré de L est supérieur ou égal à c, on obtient que la norme de $\pi^\kappa_{\mathfrak{m}} : H^0(\mathcal{U}, p_2^*\omega^\kappa) \to H^0(\mathcal{U}, p_1^*\omega^\kappa)$ est inférieure à $p^{-c\inf_{\tau\in\Sigma_i} k_\tau}$, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $C_{\mathfrak{m},rig}$. □

2.3 Classicité de formes surconvergentes

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème principal.

Théorème 2.3.1. *Soit f une forme modulaire surconvergente de poids $\kappa \in \mathbb{Z}^\Sigma$. Supposons que f soit propre pour les opérateurs de Hecke U_{π_i}, de valeurs propres a_i, et que l'on ait pour tout $1 \leq i \leq g$*

$$e_i(v(a_i) + f_i) < \inf_{\sigma\in\Sigma_i} k_\sigma$$

Alors f est classique.

Une forme modulaire est définie sur un espace du type $X_{\geq(f_1-\varepsilon,\dots,f_g-\varepsilon)}$, pour un certain $\varepsilon>0$. Pour montrer que f est classique, nous allons tout d'abord prolonger f à tout X_{rig}. Le prolongement se fera direction par direction, c'est-à-dire que l'on prolongera f à $Deg^{-1}([0,f_1]\times [f_2-\varepsilon,f_2]\times\dots\times[f_g-\varepsilon,f_g])$, puis à $Deg^{-1}([0,f_1]\times[0,f_2]\times[f_3-\varepsilon,f_3]\times\dots\times [f_g- \varepsilon,f_g])$, et ainsi de suite.
Chacune de ses étapes se démontrant de manière analogue, nous ne détaillerons que la première, c'est-à-dire le prolongement à $Deg^{-1}([0,f_1]\times[f_2-\varepsilon,f_2]\times\dots\times[f_g-\varepsilon,f_g])$.

2.3.1 Prolongement automatique

Soit f une forme modulaire surconvergente vérifiant les hypothèses du théorème 2.3.1. Elle est donc définie sur $X_{\geq(f_1-\varepsilon,\dots,f_g-\varepsilon)}$, pour un certain $\varepsilon>0$. Pour tout intervalle I, notons $\mathcal{U}_I := Deg^{-1}(I\times[f_2-\varepsilon,f_2]\times\dots\times[f_g-\varepsilon,f_g])$. La forme f est donc définie sur $\mathcal{U}_{[f_1-\varepsilon,f_1]}$. Nous allons prolonger f à $\mathcal{U}_{]f_1-\frac{1}{e_1},f_1]}$.

Proposition 2.3.2. *Il est possible de prolonger f à $\mathcal{U}_{]f_1-\frac{1}{e_1},f_1]}$.*

Démonstration. Soit α un rationnel avec $0<\alpha<\frac{1}{e_1}$. D'après la proposition 2.2.9, il existe une entier N tel que

$$U_{\pi_1}^N(\mathcal{U}_{[f_1-\alpha,f_1]})\subset\mathcal{U}_{[f_1-\varepsilon,f_1]}$$

La fonction $f_\alpha=a_1^{-N}U_{\pi_1}^N f$ est donc définie sur $\mathcal{U}_{[f_1-\alpha,f_1]}$, et est égale à f sur $\mathcal{U}_{[f_1-\varepsilon,f_1]}$. Nous noterons donc encore f cette fonction. De plus, les $(\mathcal{U}_{[f_1-\alpha,f_1]})$ pour $0<\alpha<\frac{1}{e_1}$ forment un recouvrement admissible de $\mathcal{U}_{]f_1-\frac{1}{e_1},f_1]}$. On peut donc étendre f à ce dernier intervalle. □

Remarque 2.3.3. Pour démontrer cette proposition, nous avons seulement utilisé le fait que la valeur propre a_1 était non nulle.

2.3.2 Séries de Kassaei

Dans cette partie, nous prolongeons la forme f à $\mathcal{U}_{[0,f_1]}$. Comme les itérés de l'opérateur U_{π_1} n'augmentent pas strictement le degré de H_1 sur cet ouvert, la méthode de la partie précédente ne s'applique pas. Nous allons construire des séries f_n, analogues de celles introduites par Kassaei dans [Ka], qui convergeront vers f. Pour cela, nous utiliserons la décomposition de l'opérateur U_{π_1} réalisée dans la partie 2.2.3.
Soit ε un réel strictement positif tel que $v(a_1)+f_1<(\frac{1}{e_1}-\varepsilon)\inf_{\sigma\in\Sigma_1}k_\sigma$. Cela est possible d'après les hypothèses du théorème 2.3.1. Soit r un nombre rationnel avec $f_1-\frac{1}{e_1}<r<f_1-\frac{1}{e_1}+\varepsilon$, et $\mathcal{U}:=\mathcal{U}_{[0,r]}$.
Soit $N\geq 1$ un entier ; d'après le théorème 2.2.12, on peut trouver une stratification $(\mathcal{U}_j)_{j\in S_N}$ de $\mathcal{U}$, et une décomposition de $U_{\pi_1}^N$ sur chaque strate $\mathcal{U}_j\backslash\mathcal{U}_{j+1}$. De plus, il est possible de faire surconverger arbitrairement cette stratification. En effet, soit $(r^{(k)})$ une suite strictement croissante de rationnels avec $r^{(0)}=r$, $r^{(k)}<f_1-\frac{1}{e_1}+\varepsilon$ pour tout k, et $(\mathcal{U}_j^{(k)})$ la stratification correspondante à $r^{(k)}$. Alors $\mathcal{U}_j^{(k+1)}$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j^{(k)}$

dans $\mathcal{U}$ pour tout j,k.
Notons $\mathcal{V}_j = \mathcal{U}_j^{(j-1)}$ pour tout $j \geq 1$, et $\mathcal{V}'_j = \mathcal{U}_j^{(j)}$ pour tout $i \geq 0$. Alors $\mathcal{V}'_j$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_j$ dans $\mathcal{U}$. Nous avons décomposé l'opérateur $U_{\pi_1}^N$ sur $\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}$ en

$$U_{\pi_1}^N = \coprod_{k=0}^{N-1} U_{\pi_1}^{N-1-k} T_k \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{\pi_1,j}^{good}$ et pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \ldots, j_k \in S_{N-k}} U_{\pi_1,j_k}^{good} U_{\pi_1,j_{k-1},j_k}^{bad} \ldots U_{\pi_1,j,j_1}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \ldots, j_{N-1} \in S_1} U_{\pi_1,j_{N-1}}^{bad} U_{\pi_1,j_{N-2},j_{N-1}}^{bad} \ldots U_{\pi_1,j,j_1}^{bad}$$

Les images de $U_{\pi_1,j}^{good}$ et de U_{π_1,j_k}^{good} $(j_k \in S_{N-k})$ sont incluses dans $\mathcal{U}_{[r^{(j)},f_1]} \subset \mathcal{U}_{[r,f_1]}$, et les opérateurs $U_{\pi_1,i,j}^{bad}$, $U_{\pi_1,j}^{bad}$ ne font intervenir que des supplémentaires L de degré supérieur à $f_1 - r^{(j)} > \frac{1}{e_1} - \varepsilon$.

Définition 2.3.4. Les séries de Kassaei sur $\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}$ sont définies par

$$f_{N,j} := a_1^{-1} U_{\pi_1,j}^{good} f + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j_1 \in S_{N-1}, \ldots, j_k \in S_{N-k}} a_1^{-k-1} U_{\pi_1,j,j_1}^{bad} \ldots U_{\pi_1,j_{k-1},j_k}^{bad} U_{\pi_1,j_k}^{good} f$$

Cette fonction est bien définie, puisque les opérateurs $U_{\pi_1,j}^{good}$ sont soit nuls, auquel cas leur action sur f donne 0, soit à valeurs dans $\mathcal{U}_{[r,f_1]}$ et f est définie sur cet espace. Ce dernier espace étant quasi-compact, f y est bornée, disons par M.
La proposition 2.2.13 permet de majorer la norme des opérateurs $a_1^{-1} U_{p,j,k}^{bad}$: la norme de ces opérateurs est inférieure à

$$u_0 = p^{f_1 + v(a_1) - (\frac{1}{e_1} - \varepsilon) \inf_{\sigma \in \Sigma_1} k_\sigma} < 1$$

Lemme 2.3.5. *Les fonctions $f_{N,i}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. On a

$$|a_1^{-k-1} U_{\pi_1,j,j_1}^{bad} \ldots U_{\pi_1,j_{k-1},j_k}^{bad} U_{\pi_1,j_k}^{good} f|_{\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}} \leq u_0^k |a_1^{-1} U_{\pi_1,j_k}^{good} f|_{U_{\pi_1,j_{k-1},j_k}^{bad} \ldots U_{\pi_1,j,j_1}^{bad} (\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1})} \leq |a_1^{-1}| p^{f_1} M$$

car la norme de U_{π_1,j_k}^{good} est majorée par p^{f_1}. On peut donc majorer la fonction $f_{N,j}$ par

$$|f_{N,j}|_{\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}} \leq |a_1^{-1}| p^{f_1} M$$

ce qui prouve que les fonctions $f_{N,j}$ sont uniformément bornées. $\square$

Puisque ces fonctions sont bornées, nous pouvons supposer qu'elles sont entières, quitte à multiplier f par une constante. Nous allons maintenant recoller ces fonctions sur $\mathcal{U}$.

Lemme 2.3.6. *Soient $j, k \in S_N$ et $x \in (\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}) \cap (\mathcal{V}'_k \backslash \mathcal{V}_{k+1})$. Alors*

$$|(f_{N,j} - f_{N,k})(x)| \leq u_0^N M$$

Démonstration. La série de Kassaei évalue la fonction f en certains points de $U_{\pi_1}^N(x)$ avec les règles suivantes : si un point est dans $\mathcal{U}_{[f_1 - \frac{1}{e_1}+\varepsilon, f_1]}$, il est toujours pris en compte, s'il est dans $\mathcal{U}_{[0,r]}$ il n'est jamais pris en compte. La différence entre deux séries ne peux donc porter que sur des points de $U_{\pi_1}^N(x)$ dont le degré de H_1 est compris entre r et $f_1 - \frac{1}{e_1} + \varepsilon$. De manière plus précise, supposons que $x = (A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j})$. Alors ils existent un entier $k \geq 0$, et pour tout $1 \leq i \leq k$ un élément $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, des sous-groupes $L_{i,1} \in A[\pi_1]$, $L_{i,l+1} \subset (A/L_{i,l})[\pi_1]$ qui sont des supplémentaires de l'image de H_1, et tels que pour toute section non nulle ω de ω^κ, on ait

$$f_{N,j}(x,\omega) - f_{N,k}(x,\omega) = p^{-Nf_1} a_1^{-N} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i f(A/L_{i,N}, i', \phi', H', \omega_{i,N})$$

où la suite $(\omega_{i,l})$ est déterminée par l'équation $\pi_{i,l}^* \omega_{i,l+1} = \omega_{i,l}$ avec $\pi_{i,l} : A/L_{i,l} \to A/L_{i,l+1}$ (en posant $\omega_{i,0} = \omega$ et $L_{i,0} = 0$).
De plus, on a deg $L_{i,l} > \frac{1}{e_1} - \varepsilon$ pour tous i, l et deg $L_{i,N} \leq \frac{1}{e_1} - r$ pour tout i.
Le calcul sur les normes des opérateurs de Hecke (lemme 2.2.13) montre que l'on a

$$|(f_{N,i} - f_{N,j})(x)| \leq p^{Nf_1 + Nv(a_1) - N(\frac{1}{e_1} - \varepsilon)\inf k_{g,i}} |f|_{\mathcal{U}_{[r,f_1]}} \leq u_0^N M$$

$\square$

Proposition 2.3.7. *Il existe un entier A_N telle que les fonctions $(f_{N,j})_{j \in S_N}$ se recollent en une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.*

Démonstration. La décomposition de l'ouvert $\mathcal{U}$ étant finie, soit L tel que $\mathcal{V}_{L+1}$ soit vide. La fonction $f_{N,L}$ est donc définie sur $\mathcal{V}'_L$. La fonction $f_{N,L-1}$ est définie sur $\mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L$.
De plus, d'après le lemme précédent, on a

$$|f_{N,L-1} - f_{N,L}|_{(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L} \leq u_0^N M$$

Soit A_N tel que $u_0^N M \leq p^{-A_N}$; comme $u_0 < 1$, la suite (A_N) tend vers l'infini.
Les fonctions $f_{N,L-1}$ et $f_{N,L}$ sont donc égales modulo p^{A_N} sur $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L$. Comme $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}, \mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L)$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{V}'_{L-1}$, celles-ci se recollent en une fonction $g_{N,L-1} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-1}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
De même, $g_{N,L-1}$ et $f_{N,L-2}$ sont égales (modulo p^{A_N}) sur $(\mathcal{V}'_{L-2} \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_{L-1}$, et donc se recollent en $g_{N,L-2} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-2}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
En répétant ce processus, on voit que les fonctions $f_{N,j}$ se recollent toutes modulo p^{A_N} sur $\mathcal{V}'_0 = \mathcal{U}$, et définissent donc une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$. $\square$

Proposition 2.3.8. *Les fonctions* (g_N) *définissent un système projectif dans* $\varprojlim H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa/p^m)$.

Démonstration. Nous allons prouver que g_{N+1} et g_N sont égales modulo p^{A_N}. Soit $x \in \mathcal{U}$; nous avons construit en x les séries de Kassaei $f_{N,j}$ et $f_{N+1,k}$. Or le terme $f_{N+1,k}$ provient d'une décomposition de $U_{\pi_1}^{N+1}$ du type

$$U_{\pi_1}^{N+1} = \sum_{l=0}^{N} U_{\pi_1}^{N-l} T_N + T_{N+1}$$

Nous pouvons donc écrire $f_{N+1,k} = h_1 + h_2$, la fonction h_1 étant associée à l'opérateur $\sum_{l=0}^{N-1} U_{\pi_1}^{N-1-l} T_N$ et h_2 à T_N.
Or la fonction h_1 est en réalité une série de Kassaei pour une certaine décomposition de $U_{\pi_1}^N$: le lemme précédent donne donc

$$|(f_{N,j} - h_1)(x)| \leq p^{-A_N}$$

De plus, on a

$$h_2 = \sum_{j_1 \in S_N, \dots, j_N \in S_1} a_1^{-N-1} U_{\pi_1,j,j_1}^{bad} \dots U_{\pi_1,j_{N-1},j_N}^{bad} U_{\pi_1,j_N}^{good} f$$

donc comme les opérateurs $a_1^{-1} U_{\pi_1,i,l}^{bad}$ ont une norme inférieure à u_0,

$$|h_2(x)| \leq u_0^N p^{f_1} |a_1^{-1}| M \leq p^{-A'_N}$$

avec $A'_N = A_N - f_1 - v(a_1)$. Quitte à remplacer A_N par A'_N, on voit donc que la réduction de g_{N+1} modulo p^{A_N} est égal à g_N. □

En utilisant le gluing lemma (lemme 2.1.12), on voit donc que les fonctions g_N définissent une fonction $g \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$. Bien sûr, g coïncide avec f sur $\mathcal{U}_{]f_1 - \frac{1}{e_1}, f_1]}$.
En effet, si $x \in \mathcal{U}_{]f_1 - \frac{1}{e_1}, f_1]}$, il existe N_0 tel que $U_{\pi_1}^N(x) \subset \mathcal{U}_{[f_1 - \varepsilon, f_1]}$ pour $N \geq N_0$, et la série de Kassaei est alors stationnaire égale à

$$a_1^{-N_0} U_{\pi_1}^{N_0} f = f$$

Nous pouvons donc étendre f à $\mathcal{U}_{[0,f_1]}$.

2.3.3 Fin de la démonstration

Nous avons étendu f à $\mathcal{U}_{[0,f_1]} = Deg^{-1}([0, f_1] \times [f_2 - \varepsilon, f_2] \times \dots \times [f_g - \varepsilon, f_g])$. En utilisant le fait que f soit propre pour U_{π_2}, et en utilisant la relation vérifiée par la valeur propre a_2, la même méthode montre que l'on peut étendre f à

$$Deg^{-1}([0, f_1] \times [0, f_2] \times [f_3 - \varepsilon, f_3] \times \dots \times [f_g - \varepsilon, f_g])$$

En répétant ce processus, on voit donc que l'on peut étendre f à tout X_{rig}. Comme $d > 1$, le principe de Koecher et GAGA permettent de montrer que

$$H^0(X_K, \omega^\kappa) = H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$$

ce qui permet de conclure que f est classique. Nous détaillons ces résultats dans la partie suivante.

2.4 Compactifications et principe de Koecher

2.4.1 Compactifications toroïdales

Dans [Ra], Rapoport a construit des compactifications de la variété de Hilbert sans niveau, ainsi que pour le niveau $\Gamma(N)$. Sa méthode est très générale, et s'adapte à d'autres structures de niveau. Mentionnons que la construction de compactifications dans le cas de structure de niveau $\Gamma_1(N)$ a été fait dans [Di].
Fixons un idéal $\mathfrak{c}$ un idéal de O_F ; nous allons définir les pointes $\mathfrak{c}$-polarisées. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal, on note $\mathfrak{a}^* = \delta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$.

Définition 2.4.1. Une (R, N, π)-pointe $\mathcal{C}$ est une classe d'équivalence de couples $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, \lambda, \beta, H)$ où

- $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux avec $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^*$.
- L est un réseau de F^2 avec une suite exacte
$$0 \to \mathfrak{a}^* \to L \to \mathfrak{b} \to 0$$
- $\lambda : \wedge^2 L \to \mathfrak{c}^*$ est un isomorphisme O_F-linéaire (polarisation).
- $\beta : N^{-1}\delta^{-1}/\delta^{-1} \hookrightarrow N^{-1}L/L$ est un morphisme injectif.
- H est un sous-groupe de $\pi^{-1}L/L$ de rang p^f, tel que $H = \prod_i H_i$, avec H_i un sous-groupe de ${\pi_i}^{-1}L/L$ de rang p^{f_i}, pour $1 \leq i \leq g$.

Des couples $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, \lambda, \beta, H)$ $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', L', \lambda', \beta', H')$ sont équivalents s'il existe $\xi \in F$ avec $\mathfrak{a}' = \xi\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \xi\mathfrak{b}$, un isomorphisme $f : L \simeq L'$ respectant les suites exactes définissant L et L' tel que

- L'isomorphisme $\wedge^2 L \simeq \wedge^2 L'$ induit un automorphisme de $\mathfrak{c}^*$ donné par un élément de $O_F^{\times,+}$ (unités totalement positives).
- Les structures de niveau pour L et L' sont isomorphes via f.

Si $\mathcal{C} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, \lambda, \beta, H)$ est une pointe, on note $\mathfrak{b}'$ l'idéal contenant $\mathfrak{b}$, égal à l'image de β dans $N^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ (pour tout entier m, on a une suite exacte $0 \to m^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^* \to m^{-1}L/L \to m^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$). Soit n l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.
De même, soit $\mathfrak{b}'_i$ l'idéal tel que $\mathfrak{b}'_i/\mathfrak{b}$ soit égal à l'image de H_i dans $\pi_i^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$. Remarquons que H_i est soit isomorphe à $\pi_i^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$, soit à $\pi_i^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$. On notera $\mathfrak{b}''$ le plus petit idéal contenant $\mathfrak{b}'$ et les $\mathfrak{b}'_i$.

Définition 2.4.2. Une pointe $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', L', \lambda', \beta', H')$ appartient à la même composante que $\mathcal{C}$ s'il existe $\xi \in F$ avec $\mathfrak{a}' = \xi\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \xi\mathfrak{b}$, un isomorphisme $f : L \simeq L'$ respectant les suites exactes définissant L et L', la polarisation, la structure de niveau π, et tel qu'il existe un automorphisme ϕ de $N^{-1}L/L$ induisant l'identité sur $N^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$, et la multiplication par $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$, avec
$$\beta' = f \circ \phi \circ \beta$$

On notera $\overline{\mathcal{C}}$ la classe de la composante de $\mathcal{C}$.
Notons également
$$O_{\mathcal{C},1}^\times = \{u \in O_F^\times | u \in (1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}) \cap (1 + N\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})\}$$

$$O^{\times}_{\overline{\mathcal{C}},1} = \{u \in O^{\times}_F | u \in ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}) \cap (1 + N\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})\}$$

Soit $H_{\mathcal{C},1} = O^{\times}_{\overline{\mathcal{C}},1}/O^{\times}_{\mathcal{C},1}$. Nous utilisons ces notations pour être cohérent avec [Di].
Nous allons maintenant définir les cartes locales pour la pointe $\mathcal{C}$. Soit $P = \mathfrak{a}\mathfrak{b}''$ (noté X dans [Di]), $S = S_{\mathcal{C}} = \mathbb{G}_m \otimes P^*$. Soit $\Sigma^{\mathcal{C}}$ un éventail complet de P^*_+, l'ensemble des éléments totalement positifs de P^*. Soit $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$. On peut lui associer des espaces S_σ, $\overline{S}_\sigma$ et $\overline{S}^0_\sigma$ (voir [Di]) ; on notera $S \hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ l'immersion torique obtenue en recollant les immersions $S \hookrightarrow S_\sigma$, et $S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ la complétion de $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ le long de $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \backslash S$. La construction de Mumford appliquée à $(P, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ donne alors un schéma semi-abélien G_σ sur $\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de O_F, et dont la restriction à $\overline{S}^0_\sigma$ est un SAHB muni d'une $\mathfrak{c}$-polarisation que l'on notera G^0_σ. De plus, pour tout idéal $\mathfrak{m}$, on a une suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{m}\mathfrak{a})(1) \to G^0_\sigma[\mathfrak{m}] \to \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$$

où (1) désigne le dual de Cartier d'un schéma en groupes.
Nous allons maintenant associer à G^0_σ des structures de niveau. La structure de niveau $\Gamma_1(N)$ a été faite dans [Di]. Remarquons qu'obtenir cette structure de niveau nécessite d'uniformiser la pointe, et de se placer sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_{\mathcal{C}}]$, où $\zeta_{\mathcal{C}}$ est une racine de l'unité d'ordre n, l'exposant de $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$. Décrivons comment obtenir la structure de niveau $\Gamma_0(\pi)$. Cela revient à se donner un sous-groupe H^0_i de $G^0_\sigma[\pi_i]$ de rang p^{f_i} pour tout i.
Si le sous-groupe H_i relatif à la pointe $\mathcal{C}$ est égal à $\pi_i^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$, on définit H^0_i comme l'image de $(\mathfrak{a}/\pi_i\mathfrak{a})(1)$ dans $G^0_\sigma[\pi_i]$. Sinon, H_i est isomorphe à $\pi_i^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'_i/\mathfrak{b}$. La construction de Mumford appliquée à $(P, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}'_i)$ donne un schéma semi-abélien $G'_{\sigma,i}$ sur $\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de O_F, et dont la restriction à $\overline{S}^0_\sigma$ est un SAHB muni d'une $\mathfrak{c}'_i = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'_i$-polarisation que l'on notera $G'^0_{\sigma,i}$. Par fonctorialité, on a une isogénie $G^0_\sigma \to G'^0_{\sigma,i}$. On dispose alors d'une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{b}'_i/\mathfrak{b} \to G^0_\sigma[\pi_i] \to G'^0_{\sigma,i}[\pi_i] \to 0$$

On définit alors H^0_i comme l'image de $\mathfrak{b}'_i/\mathfrak{b}$ dans $G^0_\sigma[\pi_i]$.
De plus, les variétés abéliennes données par la construction de Mumford étant ordinaires, le faisceau conormal de G^0_σ est un $O_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\overline{S}^0_\sigma}$-module localement libre de rang 1, donc est canoniquement filtré. Nous avons donc défini un point de $X_{\mathfrak{c}}$. Plus précisément, il existe un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
G^0_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]) \arrow[r] \arrow[d, phantom] & A \arrow[d] \\
\overline{S}^0_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]) \arrow[r] & X_{\mathfrak{c}}
\end{tikzcd}$$

où A est le SAHB universel sur $X_{\mathfrak{c}}$.
Nous allons recoller les cartes locales avec $X_{\mathfrak{c}}$, de manière à obtenir une compactification de ce dernier espace.

Définition 2.4.3. Un éventail admissible $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est la donnée pour chaque classe d'isomorphisme de (R, N, π)-composante $\mathcal{C}$ d'un éventail complet $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de P^*_+, stable par $O^{\times}_{\mathcal{C},1}$, et ne contenant qu'un nombre fini d'élément modulo cette action.

Voici l'analogue du principal théorème de [Ra] et de [Di].

Théorème 2.4.4. *Soit $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ un éventail admissible. Alors il existe un Spec(O_K)-schéma $X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma}$, une immersion ouverte $X_{\mathfrak{c}} \hookrightarrow X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma}$, et un isomorphisme de schémas formels*

$$\coprod_{\mathcal{C}} (S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^{\wedge}/O_{\mathcal{C},1}^{\times}) \times Spec(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C},1}}) \simeq X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma\wedge}$$

où $X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma\wedge}$ désigne le complété formel de $X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma}$ le long de sa partie à l'infini.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème 7.2 de [Di]. Celle-ci utilise le théorème de géométrie rigide démontré par Rapoport dans [Ra] (théorème 3.5). La vérification des hypothèses de ce théorème utilise la construction de Raynaud (voir dans [Di] par exemple), qui décrit les variétés abéliennes sur L, un corps de fractions d'un anneau de valuation discrète, qui ont mauvaise réduction semi-stable déployée.
Décrivons rapidement les deux conditions à vérifier pour appliquer le théorème de Rapoport. La première demande d'étudier les L-points de $\overline{S}_{\sigma_1}^0$ et $\overline{S}_{\sigma_2}^0$ qui donnent la même variété abélienne A sur L, où σ_j est un cône d'une certaine composante $\mathcal{C}_j$. La description de Raynaud, ainsi que les structures de niveau sur A montrent que les deux composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont isomorphes, et que les cônes σ_1 et σ_2 sont d'intersection non vide. Cela permet de vérifier le premier point.
Pour la seconde hypothèse, il faut vérifier que si on a des morphismes f : Spec $L \to \overline{S}_{\sigma}^0$, et g : Spec $R \to X_{\mathfrak{c}}$ (R est l'anneau des entiers de L), compatible par le morphisme Spec $L \to$ Spec V, alors on peut étendre f à Spec R. Or ces morphismes donnent des SAHB A sur L, et A' sur R tels que $A = A' \otimes_R L$. Le morphisme f donne une composante $\mathcal{C}$, et la construction de Mumford permet de décrire la variété abélienne A. la description de Raynaud permet quant à elle de décrire la variété abélienne A'. La compatibilité entre la construction de Mumford et celle de Raynaud permettent alors d'identifier ces deux descriptions, et d'étendre le morphisme f à Spec R. $\square$

Nous noterons $\overline{X_{\mathfrak{c}}} = X_{\mathfrak{c}}^{\Sigma}$, même si la construction de cet espace dépend d'un choix de Σ. Énonçons quelques propriétés de cet espace.

Proposition 2.4.5. *Il existe un unique schéma en groupes semi-abélien $\mathcal{A} \to \overline{X_{\mathfrak{c}}}$ qui étende le SAHB universel A sur $X_{\mathfrak{c}}$. Il est muni d'une action de O_F, et c'est un tore sur $\overline{X_{\mathfrak{c}}} \backslash X_{\mathfrak{c}}$.*

Démonstration. L'existence de $\mathcal{A}$ découle de la construction, puisque nous avons construit un schéma semi-abélien $G_\sigma \times$Spec$(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}])$ sur $\overline{S}_\sigma \times$Spec$(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}])$ pour toute pointe $\mathcal{C}$.
Pour démontrer l'unicité, remarquons tout d'abord que le bord $\overline{X_{\mathfrak{c}}} \backslash X_{\mathfrak{c}}$ est inclus dans le lieu de Rapoport. Il suffit donc de démontrer l'unicité du prolongement de $X_{\mathfrak{c}}^R$ à $\overline{X_{\mathfrak{c}}}^R$, où $X_{\mathfrak{c}}^R$ est l'ouvert de Rapoport de $X_{\mathfrak{c}}$, et de même pour $\overline{X_{\mathfrak{c}}}$. Le schéma $\overline{X_{\mathfrak{c}}}^R$ est lisse donc normal, et $X_{\mathfrak{c}}^R$ est un ouvert dense de cet espace. On peut alors appliquer la proposition 2.7 de [F-C] pour conclure. $\square$

Proposition 2.4.6. *Le schéma $\overline{X_{\mathfrak{c}}}$ est propre sur O_K.*

Démonstration. Il suffit de vérifier le critère valuatif de propreté. Soit R un anneau de valuation discrète de corps des fractions L. Comme $X_{\mathfrak{c}}$ est un ouvert dense de $\overline{X_{\mathfrak{c}}}$, il suffit de montrer que tout morphisme f : Spec $L \to X_{\mathfrak{c}}$ peut se prolonger en un morphisme Spec $R \to \overline{X_{\mathfrak{c}}}$.
Si la variété abélienne A sur L donnée par f est à bonne réduction sur R, il existe une variété abélienne A_0 sur R telle que $A = A_0 \otimes_R L$. La polarisation ϕ, et les structures de niveau μ_N et $\Gamma_0(\pi)$ pour A donnent une polarisation et des structures de niveau pour A_0. De plus, la filtration de ω_A, qui est un L-espace vectoriel, donne une filtration pour ω_{A_0}. Il suffit en effet de prendre l'image inverse de la filtration de ω_A par le morphisme $\omega_{A_0} \to \omega_{A_0} \otimes_R L = \omega_A$. On peut donc définir un morphisme Spec $R \to X_{\mathfrak{c}}$ qui étend f.
Supposons maintenant que la variété abélienne A a mauvaise réduction. La théorie de géométrie rigide de Raynaud (voir [Di] par exemple) fournit alors deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, et $A_{rig} = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*)_{rig}/\mathfrak{b}_{rig}$. Les structures de niveau pour A définissent alors une (R, N, π)-composante $\mathcal{C}$. La description de Raynaud fournit en plus un élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*_+$. Un translaté de ξ^* par $O^\times_{\mathcal{C},1}$ appartient à un cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ utilisé pour la construction de $\overline{X_c}$. Le morphisme f se factorise donc par la carte locale $\overline{S}^0_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]) \to X_{\mathfrak{c}}$. Le morphisme Spec $L \to \overline{S}^0_\sigma \times$ Spec$(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]) \hookrightarrow \overline{S}_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}])$ s'étend alors nécessairement en un morphisme Spec $R \to \overline{S}_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}])$. Le morphisme

$$g : \mathrm{Spec}\ R \to \overline{S}_\sigma \times \mathrm{Spec}(O_K[\zeta_{\mathcal{C}}]) \to \overline{X_{\mathfrak{c}}}$$

étend alors le morphisme f. □

Nous noterons $\overline{X} = \coprod_i \overline{X_{\mathfrak{c}_i}}$; c'est encore un schéma propre sur O_K.

2.4.2 Principe de Koecher

Comme il existe un schéma semi-abélien $\mathcal{A}$ sur $\overline{X}$, le faisceau ω_A se prolonge en $\omega_{\mathcal{A}}$ sur $\overline{X}$. De plus, $\mathcal{A}$ est un tore sur le bord $\overline{X} \backslash X$; ce dernier espace est donc dans le lieu de Rapoport.

Proposition 2.4.7. *Le faisceau ω^κ se prolonge sur $\overline{X}$.*

Comme le degré de F est supérieur ou égal à 2, on dispose du principe de Koecher. Nous nous inspirons de la démonstration de [Di], théorème 8.3.

Théorème 2.4.8. *Pour tout O_K-algèbre R, on a*

$$H^0(X \times \mathit{Spec}\ R, \omega^\kappa) = H^0(\overline{X} \times \mathit{Spec}\ R, \omega^\kappa)$$

Démonstration. Soit $f \in H^0(X \times \mathrm{Spec}\ R, \omega^\kappa)$; nous voulons montrer que f peut s'étendre en un élément de $H^0(\overline{X} \times \mathrm{Spec}\ R, \omega^\kappa)$. Il suffit de montrer que f peut s'étendre aux pointes de $X_{\mathfrak{c}}$, pour tout $\mathfrak{c}$. Soit donc $\mathcal{C}$ une telle pointe, et P l'idéal fractionnaire associé. La forme modulaire f possède un q-développement méromorphe le long de $S^{\wedge}_{\Sigma\mathcal{C}}$:

$$f = \sum_{\xi \in P} a_\xi q^\xi$$

avec $a_\xi \in R$. Il n'existe qu'un nombre fini de $\xi \notin P_+$ avec $a_\xi \neq 0$, et pour tout $u \in O^\times_{\mathcal{C},1}$, on a $a_\xi = 0 \Leftrightarrow a_{u^2\xi} = 0$.
Supposons qu'il existe $\xi_0 \notin (P_+ \cup \{0\})$, avec $a_{\xi_0} \neq 0$. Alors $a_{u^2\xi_0}$ est également non nul pour $u \in O^\times_{\mathcal{C},1}$. Or $u^2\xi_0$ n'appartient pas à $P_+ \cup \{0\}$ si $u \in O^\times_{\mathcal{C},1}$, et comme $d \geq 2$ et $\xi_0 \neq 0$, l'ensemble $\{u^2\xi_0, u \in O^\times_{\mathcal{C},1}\}$ est infini d'après le théorème des unités de Dirichlet. On obtient donc une contradiction.
La forme f a donc un prolongement holomorphe en la pointe $\mathcal{C}$. □

En appliquant ce résultat à $R = O_K/p^n$ pour tout n, en prenant la limite, puis en tensorisant par K, on obtient que

$$H^0(X_{rig}, \omega^\kappa) = H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa)$$

où $\overline{X}_{rig}$ est la fibre générique rigide de la complétion formelle de $\overline{X}$ le long de sa fibre spéciale. De plus, le schéma $\overline{X}$ étant propre sur O_K, on a par GAGA (voir [EGA3] partie 5.1)

$$H^0(\overline{X} \times \text{Spec } K, \omega^\kappa) = H^0(\overline{X}_{rig}, \omega^\kappa)$$

En résumé, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.4.9. *L'espace des formes modulaires, $H^0(X_K, \omega^\kappa)$, est égal à $H^0(X_{rig}, \omega^\kappa)$.*

Chapitre 3

Cas ramifié

Dans ce chapitre, nous généralisons les résultats du premier chapitre en autorisant le nombre premier p à être ramifié. Les quatre premières parties sont consacrées aux variétés de Shimura PEL de type (C). La cinquième partie est consacrée aux variétés de Shimura de type (A), et dans la sixième partie, nous considérons des variétés de Shimura avec des niveaux en p plus généraux que le niveau Iwahorique.

3.1 Espace de modules et formes modulaires

Nous étudions dans ce paragraphe le cas des variétés de Shimura de type (C), en autorisant le nombre premier p à être ramifié dans la donnée de Shimura. La principale difficulté dans ce cas provient de l'absence de modèles entiers pour les compactifications de la variété de Shimura. En effet, l'espace de modules définit un schéma sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et il est possible de construire des compactifications de cet espace après inversion de p. Construire des modèles entiers pour ces compactifications qui vérifierons des bonne propriétés est un exercice difficile (voir [Ra] dans le cas Hilbert). Il est peut-être possible de définir les compactifications en prenant la normalisation d'un certain espace dans un autre, mais vérifier que cette compactification vérifie les bonnes propriétés serait au minimum long et pénible.
La principale difficulté posée par l'absence de modèle entier des compactifications est l'absence du principe de Koecher. Ainsi, si X^{rig} est l'espace rigide associé à la variété de Shimura entière, une section du faisceau des formes modulaires sur X^{rig} ne provient plus nécessairement d'une forme modulaire classique. Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser le modèle rationnel de la variété de Shimura, et travailler avec l'espace analytique associé. Nous adaptons ensuite les résultats obtenus dans les parties précédentes à cet espace analytique.

3.1.1 Données de Shimura

Rappelons les données paramétrant les variétés de Shimura PEL de type (C) (voir [Ko]). Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. Soit F le centre de

B et F_0 le sous-corps de F fixé par $\star$. Le corps F_0 est une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$, soit d son degré. Faisons les hypothèses suivantes :

- $F = F_0$.
- Pour tout plongement $F \to \mathbb{R}$, $B \otimes_F \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et l'involution $\star$ est donnée par $A \to A^t$.

Soit également $(U_{\mathbb{Q}}, \langle , \rangle)$ un B-module hermitien non dégénéré. Soit G le groupe des automorphismes du B-module hermitien $U_{\mathbb{Q}}$; pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, on a donc

$$G(R) = \{(g, c) \in GL_B(U_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times R^*, \langle gx, gy \rangle = c\langle x, y\rangle \text{ pour tout } x, y \in U_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} R\}$$

Soient $\tau_1, \ldots, \tau_d$ les plongements de F dans $\mathbb{R}$,et $B_i = B \otimes_{F,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{Sp}_{2g}\right)$$

où $g = \frac{1}{2nd}\dim_{\mathbb{Q}} U_{\mathbb{Q}}$.
Donnons-nous également un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B U_{\mathbb{R}}$ tel que $\langle h(z)v, w\rangle = \langle v, h(\overline{z})w\rangle$ et $(v, w) \to \langle v, h(i)w\rangle$ est définie positive. Ce morphisme définit donc une structure complexe sur $U_{\mathbb{R}}$: soit $U_{\mathbb{R}}^{1,0}$ le sous-espace de $U_{\mathbb{R}}$ pour lequel $h(z)$ agit par la multiplication par z.
On a alors $U_{\mathbb{R}}^{1,0} \simeq \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{R}^n)^g$ en tant que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$-module.
Soient également un ordre O_B de B stable par $\star$, et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ tel que l'accouplement $\langle , \rangle$ restreint à $U \times U$ soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.
- O_B est un ordre maximal en p.
- L'accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

L'algèbre B est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ une base de cet espace vectoriel, et

$$\det_{U^{1,0}} = f(X_1, \ldots, X_t) = \det(X_1\alpha_1 + \cdots + X_t\alpha_t; U_{\mathbb{C}}^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_t])$$

On montre ([Ko]) que f est un polynôme à coefficients algébriques. Le corps de nombres E engendré par ses coefficients est appelé corps réflexe, et est égal à $\mathbb{Q}$ dans le cas (C).
Soit h le nombre d'idéaux premiers de F au-dessus de p, que l'on notera $\pi_1, \ldots, \pi_h$. Soient également f_i le degré résiduel et e_i l'indice de ramification de π_i. On a donc $(p) = \prod_{i=1}^{h} \pi_i^{e_i}$.
Alors $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \prod_{i=1}^{h} \mathrm{M}_n(F_i)$, où F_i est la complétion de F en π_i. Le corps F_i est donc une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, de degré $d_i := e_i f_i$, d'indice de ramification e_i et de degré résiduel f_i.

3.1.2 Variété de Shimura

Définissons maintenant la variété de Shimura PEL de type (C) associée à G. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant les images de tous les plongements possibles $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit $N \geq 3$ un entier premier à p.

Définition 3.1.1. Soit X sur $\mathrm{Spec}(K)$ l'espace de modules dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où

- $A \to S$ est un schéma abélien
- $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.
- $\iota : O_B \to \mathrm{End}\, A$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{U^{1,0}}$ et $\det_{Lie(A)}$ sont égaux.
- $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique O_B-linéaire, qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique O_B-linéaire
$$H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$$

Proposition 3.1.2. *L'espace X est un schéma quasi-projectif sur K.*

De plus, il est possible de construire des compactifications toroïdales de l'espace X. Celles-ci sont construites par exemple dans [Pin]. On rappelle que la construction de ces compactifications nécessite un choix combinatoire, que l'on supposera fait dans la suite. Rappelons ici le principal de théorème de Pink quant aux compactifications toroïdales des variétés de Shimura, et la fonctorialité de ces constructions. On renvoie à [Pin] pour les définitions précises et les constructions.

Théorème 3.1.3 ([Pin] Théorème 12.4)**.**

- *Soit D une donnée de Shimura, et X la variété de Shimura associée ; c'est un schéma défini sur le corps réflexe E. Alors, à tout choix combinatoire suffisamment fin Σ on peut associer une compactification toroïdale $\overline{X}^{\Sigma}$. C'est un schéma propre sur E, lisse si le choix combinatoire l'est également.*
- *Si Σ_1 est un choix combinatoire plus fin que Σ_2, alors l'identité de X s'étend de manière unique en une immersion ouverte $\overline{X}^{\Sigma_1} \hookrightarrow \overline{X}^{\Sigma_2}$.*
- *Soient D_1 et D_2 deux données de Shimura, avec un morphisme $D_1 \to D_2$. Alors, on a une inclusion des corps réflexes $E_2 \subset E_1$, et un morphisme de variétés de Shimura $X_1 \to X_2 \times_{E_2} E_1$. Soit Σ_i un choix combinatoire pour X_i. Si Σ_1 est suffisamment fin, alors le morphisme précédent s'étend en un morphisme $\overline{X_1}^{\Sigma_1} \to \overline{X_2}^{\Sigma_2} \times_{E_2} E_1$.*

Le lecteur intéressé par la fonctorialité des compactifications toroïdales peut également consulter [Ha], qui traite le cas de l'inclusion entre deux données de Shimura.
Soit donc $\overline{X}$ une compactification toroïdale de X, associé à un choix combinatoire lisse. C'est un schéma propre et lisse sur K. On supposera ce choix fixé dans la suite, en ayant à l'esprit que l'on peut prendre ce choix combinatoire arbitrairement fin. Le schéma abélien universel $A \to X$ s'étend en un schéma semi-abélien $A \to \overline{X}$. Nous allons maintenant définir une structure de niveau Iwahorique sur X. Si $A \to X$ est le schéma abélien universel sur X, on a
$$A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^h A[\pi_i^\infty]$$
De plus, les groupes de Barsotti-Tate $A[\pi_i^\infty]$ sont principalement polarisés de dimension nd_ig.

Définition 3.1.4. Soit X_{Iw} l'espace de modules sur K dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ où $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$ et $0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,g}$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats, stables par O_B, et totalement isotropes de $A[\pi_i]$, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur nf_ij, pour tout $1 \leq i \leq h$.

L'espace X_{Iw} est un schéma quasi-projectif sur K, et on dispose du morphisme d'oubli $X_{Iw} \to X$. Soit également $\overline{X}_{Iw}$ une compactification toroïdale lisse de X_{Iw} sur K. On suppose que les choix combinatoires sont faits de telle manière à ce que le morphisme $X_{Iw} \to X$ s'étend en $\overline{X}_{Iw} \to \overline{X}$ (cela est possible d'après le théorème 3.1.3).
Enfin, nous noterons X^{an}, X_{Iw}^{an}, $\overline{X}^{an}$ et $\overline{X}_{Iw}^{an}$ les espaces analytiques associés respectivement aux schémas X et X_{Iw}, $\overline{X}$ et $\overline{X}_{Iw}$ (voir [Be] par exemple).

3.1.3 Formes modulaires

Pour tout idéal premier π_i divisant p, on rappelle que F_i est la complétion de F au-dessus de π_i.
Soit A le schéma semi-abélien universel sur $\overline{X}$, et soit $\omega_A = e^*\Omega^1_{A/\overline{X}}$ le faisceau conormal relatif à la section unité de A ; il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $St \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$ comme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$-module, où

$$St = \oplus_{i=1}^h (F_i^n)^g$$

Soit $\mathcal{T}$ =Isom$_{B\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}}(St \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}, \omega_A)$. C'est un torseur sur $\overline{X}$ sous le groupe

$$M = \left(\prod_{i=1}^h Res_{F_i/\mathbb{Q}_p} GL_g \right) \times_{\mathbb{Q}_p} K$$

Soit T_M le tore diagonal de M, B_M le Borel supérieur de M, et U_M son radical unipotent. Soit $X(T_M)$ le groupe des caractères de T_M, et $X(T_M)^+$ le cône des poids dominants pour B_M. Si $\kappa \in X(T_M)^+$, on note $\kappa' = -w_0\kappa \in X(T_M)^+$, où w_0 est l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement à T_M.
Soit $\phi : \mathcal{T} \to \overline{X}$ le morphisme de projection.

Définition 3.1.5. Soit $\kappa \in X(T_M)^+$. Le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa = \phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$, où $\phi_* O_{\mathcal{T}}[\kappa']$ est le sous-faisceau de $\phi_* O_{\mathcal{T}}$ où $B_M = T_M U_M$ agit par κ' sur T_M et trivialement sur U_M.

Le faisceau ω^κ est un faisceau localement libre de rang fini sur $\overline{X}$. Une forme modulaire de poids κ sur $\overline{X}$ est donc une section globale de ω^κ, soit un élément de $H^0(\overline{X}, \omega^\kappa)$. En utilisant la projection $\overline{X}_{Iw} \to \overline{X}$, on définit de même le faisceau ω^κ sur $\overline{X}_{Iw}$, ainsi que les formes modulaires sur $\overline{X}_{Iw}$. On notera encore ω^κ le faisceau analytifié sur $\overline{X}^{an}$ et $\overline{X}_{Iw}^{an}$.

Remarque 3.1.6. Par équivalence de Morita, la catégorie des $M_n(A)$-modules et celle des A-modules sont équivalentes, pour tout anneau A. L'équivalence de catégorie est explicite :

à un A-module M, on associe M^n, qui est bien muni d'une action de $M_n(A)$; réciproquement, à un $M_n(A)$-module N, on associe le A-module $E_{1,1}N$, où $E_{1,1}$ est la matrice avec un seul coefficient non nul en position $(1,1)$ égal à 1.
De cette manière, puisque $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod_{i=1}^h M_n(F_i)$, et que le faisceau ω_A est isomorphe à $St \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ comme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$-module, l'équivalence de Morita associe à ω_A le faisceau de $(\prod_{i=1}^h F_i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules défini par $E \cdot \omega_A$, où E est la projection définie par $(E_{1,1})_i \in \prod_{i=1}^h M_n(F_i)$. Ce faisceau est isomorphe à $(\oplus_{i=1}^h F_i^g) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$ comme $(\prod_{i=1}^h F_i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\overline{X}}$-module.

3.1.4 Opérateurs de Hecke

Soit $1 \leq i \leq h$. Soit C_i l'espace de modules sur K paramétrant les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}, L)$ avec $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}) \in X_{Iw}$ et L un sous-groupe fini et plat de $A[\pi_i]$, stable par O_B, totalement isotrope et supplémentaire de $H_{i,g}$ dans $A[\pi_i]$. Nous avons deux morphismes finis étales $p_1, p_2 : C_i \to X_{Iw}$: p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L. Comme dans le cas non ramifié, nous devons définir la polarisation sur A/L. On fixe un élément totalement positif x_i de O_F, de valuation π_j-adique 1 si $j = i$ et 0 sinon. On définit la polarisation sur A/L comme la polarisation descendue $x_i \cdot \lambda$. Comme décrit dans la remarque 1.4.12, ce choix ne créera pas de difficulté.
Soit C_i^{an} l'espace analytique associé à C_i ; on note encore p_1, $p_2 : C_i^{an} \to X_{Iw}^{an}$ les morphismes induits. L'opérateur de Hecke agissant sur X_{Iw}^{an} est défini par $U_{\pi_i}(S) := p_2(p_1^{-1}(S))$ pour toute partie S de X_{Iw}^{an}. Cette correspondance envoie les ouverts sur les ouverts, et les ouverts quasi-compacts sur les ouverts quasi-compacts.
Notons $p : A \to A/L$ l'isogénie universelle au-dessus de C_i. Celle-ci induit un isomorphisme $p^* : \omega_{A/L} \to \omega_A$, et donc un morphisme $p^*(\kappa) : p_2^* \omega^\kappa \to p_1^* \omega^\kappa$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X_{Iw}^{an}, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_{\pi_i} : H^0(U_{\pi_i}(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^* \omega^\kappa) \overset{p^*(\kappa)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^* \omega^\kappa) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$$

Définition 3.1.7. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est alors défini par $U_{\pi_i} = \frac{1}{p^{n_i}} \widetilde{U}_{\pi_i}$ avec $n_i = \frac{f_i g(g+1)}{2}$.

Remarque 3.1.8. Le terme de normalisation $\frac{1}{p^{n_i}}$ sert à maximaliser l'intégrabilité de l'opérateur de Hecke, comme le montre un calcul sur les q-développements.

A priori, cet opérateur n'est défini que sur l'espace $H^0(X_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$, et non sur $H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$. Étudions les problèmes au bord.
Il existe une compactification toroïdale $\overline{C}_i$ de C_i. D'après le théorème 3.1.3, il existe un choix combinatoire pour C_i tel que le morphisme $p_1 : C_i \to X_{Iw}$ s'étend en un morphisme $\overline{C}_i \to \overline{X}_{Iw}$. Par le même argument, il existe un autre choix combinatoire pour C_i tel que le morphisme p_2 s'étend aux compactifications pour ce choix combinatoire. Or, étant donné deux choix combinatoires on peut toujours en trouver un troisième plus fin que les deux premiers. Le théorème 3.1.3 montre donc qu'il est possible de construire une compactification toroïdale $\overline{C}_i$ telle que les morphisme p_1 et p_2 s'étendent en des morphismes $\overline{C}_i \to \overline{X}_{Iw}$. Si on note $\overline{C}_i^{an}$ l'espace rigide analytique associé à $\overline{C}_i$, on obtient

des morphismes $p_1, p_2 : \overline{C}_i^{an} \to \overline{X}_{Iw}^{an}$. La même formule que précédemment permet de définir un opérateur de Hecke géométrique U_{π_i} agissant sur les parties de $\overline{X}_{Iw}^{an}$. Néanmoins, les morphismes p_1 et p_2 n'étant plus finis étales, cette correspondance ne respecte plus la topologie, c'est-à-dire que l'image d'un ouvert n'est pas nécessairement encore un ouvert. Pour la même raison, il n'est pas possible de définir l'opérateur U_{π_i} agissant sur $H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$ par la même formule que précédemment. Pour pallier à ce problème, nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 3.1.9 ([Lü]). *Soit Y un espace rigide lisse quasi-compact, et Z un fermé Zariski de Y de codimension supérieure ou égale à 1. Alors toute fonction bornée sur $Y \backslash Z$ s'étend de manière unique en une fonction sur Y.*

Soit $f \in H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$. Alors $U_{\pi_i} f$ définit un élément de $H^0(X_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$. Comme l'espace $\overline{X}_{Iw}^{an}$ est quasi-compact, la forme f est automatiquement bornée (c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement admissible de $\overline{X}_{Iw}^{an}$ par des ouverts affinoïdes sur lesquels on a une trivialisation du faisceau ω^κ, et la forme f est bornée uniformément sur chacun de ces ouverts). Il n'est pas difficile de voir que l'opérateur U_{π_i} est borné, donc que $U_{\pi_i} f$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement admissible de $\overline{X}_{Iw}^{an}$ par des ouverts affinoïdes sur lesquels on a une trivialisation du faisceau ω^κ, et $U_{\pi_i} f$ est bornée uniformément sur chacun de ces ouverts intersectés avec X_{Iw}^{an}). On peut alors appliquer le théorème précédent, et la forme $U_{\pi_i} f$ s'étend en une section de ω^κ sur $\overline{X}_{Iw}^{an}$.
L'opérateur U_{π_i} agit donc bien sur l'espace $H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$.

Remarque 3.1.10. Nous définirons dans la suite une norme sur l'espace $H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$, et majorerons la norme des opérateurs U_{π_i} (voir la partie 3.2.2).

Nous avons donc défini h opérateurs agissant sur l'espace des formes modulaires. Ces opérateurs commutent entre eux (voir la remarque 1.4.12).

3.2 Structures entières

3.2.1 Fonction degré

Nous souhaitons définir des fonctions degrés sur les espaces X_{Iw}^{an} et $\overline{X}_{Iw}^{an}$. Les sous-groupes universels $H_{i,j}$ étant définis sur des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ (et non sur leur anneau des entiers), on ne peut appliquer directement les résultats de [Fa]. Le problème principal est l'absence de modèle entier pour la compactification ; en effet, si le schéma $\overline{X}_{Iw}$ admettait un bon modèle entier propre, on pourrait définir la fonction degré sur l'espace rigide associé à ce modèle entier, qui serait égal à $\overline{X}_{Iw}^{an}$ par propreté. Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser une autre variété de Shimura, pour laquelle les structures entières sont bien connues.

Définition 3.2.1. Soit $1 \leq i \leq h$. Soit $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i}$ la variété de Siegel sur $\mathbb{Z}_p$ paramétrant
- un schéma abélien A de dimension ndg.
- $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.

- une structure de niveau principale en N, c'est-à-dire un isomorphisme $A[N] \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2ndg}$ qui respecte les formes symplectiques à un scalaire près.
- un sous-groupe H de $A[p]$, totalement isotrope et de hauteur $nf_i g$.

On dispose d'un morphisme naturel $\mathcal{P}_i : X_{Iw} \to \mathcal{A}_{ndg,Iw_i} \times K$, défini par $\mathcal{P}_i(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j}) = (A, \lambda, \eta, H_{i,g})$. On notera $\mathcal{A}^{an}_{ndg,Iw_i}$, l'espace analytique associé à $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i} \times K$, et on note toujours par $\mathcal{P}_i$ le morphisme $X^{an}_{Iw} \to \mathcal{A}^{an}_{dg,Iw_i}$.
D'après [St], il existe une compactification $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}$ de $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i}$ définie sur $\mathbb{Z}_p$. Si on note $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$ l'espace rigide associé à $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i} \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$, et $\overline{\mathcal{A}}^{an}_{ndg,Iw_i}$ l'espace analytique associé à $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i} \times K$, alors ces deux espaces sont égaux car l'espace compactifié est propre. Le sous-groupe universel H sur $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i}$ s'étend en un groupe quasi-fini et plat à $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}$. De plus, d'après le théorème 3.1.3, on peut supposer (quitte à raffiner la décomposition polyhédrale utilisée pour construire $\overline{X}_{Iw}$) que le morphisme $\mathcal{P}_i : X_{Iw} \to \mathcal{A}_{ndg,Iw_i} \times K$ s'étende en $\overline{X}_{Iw} \to \overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i} \times K$, et donc induise un morphisme $\overline{X}^{an}_{Iw} \to \overline{\mathcal{A}}^{an}_{ndg,Iw_i}$.
Nous allons définir le degré de H sur $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$. Si x est un point de $\mathcal{A}^{rig}_{ndg,Iw_i}$, alors le schéma en groupes H correspondant à x est fini et plat sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On peut donc définir son degré par [Fa]. Dans le cas général, si x est un L-point de $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$, alors le groupe H au-dessus de x est un schéma en groupes quasi-fini et plat sur O_L, l'anneau des entiers de L. Le schéma semi-abélien A au-dessus de x est obtenue par la construction de Mumford (voir [F-C] par exemple) en quotientant un schéma semi-abélien $\widetilde{G}$ sur O_L, globalement extension d'un tore T et d'un schéma abélien A_0 sur O_L, par un réseau étale Y (on se référera à [St] partie 1 pour plus de détails). Comme explicité en annexe (partie 3.7), on a de plus une suite exacte en fibre générique

$$0 \to (\widetilde{G}[p])_\eta \to (A[p])_\eta \to \frac{1}{p}Y/Y \to 0$$

où η désigne la fibre générique. Le sous-groupe $(\widetilde{G}[p])_\eta$ s'étend en un schéma en groupes fini et plat sur O_L (qui est $\widetilde{G}[p]$). Soit $\widetilde{H}$ l'intersection de H avec $\widetilde{G}[p]$; c'est un schéma en groupes fini et plat sur O_L. Il s'agit en fait du plus grand sous-groupe de H qui est fini et plat sur O_L. On peut donc définir son degré par [Fa].

Définition 3.2.2. On définit la fonction degré sur $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$ par $\deg(x) = \frac{1}{n}\deg \widetilde{H}$, pour tout $x \in \overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$.

On a ainsi défini une fonction $\deg : \overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i} \to [0, f_i g]$. Cette fonction est définie sur $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i} = \overline{\mathcal{A}}^{an}_{ndg,Iw_i}$.

Définition 3.2.3. On définit la fonction $\mathrm{Deg}_i : \overline{X}^{an}_{Iw} \to [0, f_i g]$ par $\mathrm{Deg}_i(x) = \deg \mathcal{P}_i(x)$. On définit également la fonction degré $\mathrm{Deg} : \overline{X}^{an}_{Iw} \to \prod_{i=1}^h [0, f_i g]$ par $x \to (\mathrm{Deg}_i(x))_i$.

Pour tout produit d'intervalle $I = \prod_{k=1}^h I_k$, où I_k est un sous-intervalle de $[0, f_k g]$, on note $\overline{X}_{Iw,I} := \mathrm{Deg}^{-1}(I)$. Le lieu ordinaire-multiplicatif $\overline{X}^{mult}_{Iw}$ de $\overline{X}^{an}_{Iw}$ correspond au lieu où les degrés des $H_{i,g}$ sont maximaux, soit à $\overline{X}_{Iw,I}$ avec $I = \prod_{i=1}^h \{f_i g\}$.

Proposition 3.2.4. *Si I est un produit d'intervalles compacts à bornes rationnelles, alors $\overline{X}_{Iw,I}$ est quasi-compact.*

Démonstration. Commençons tout d'abord par remarquer que, puisque l'espace $\overline{X}_{Iw}$ est propre sur K, l'espace rigide-analytique $\overline{X}_{Iw}^{an}$ est quasi-compact. Soit $p : A \to A/H$ le morphisme universel au-dessus de $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}$, il est quasi-fini et plat (il est fini sur $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i}$). Soit $\omega'_A = \det e^*\Omega^1_A$ et $\omega'_{A/H} = \det e'^*\Omega^1_{A/H}$ les déterminants des faisceaux conormaux associés à A et A/H en leurs sections unités e et e'. Soit $\mathcal{L} = {\omega'_{A/H}}^{-1} \otimes \omega'_A$; c'est un faisceau inversible sur $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}$. Le morphisme $p^* : \omega'_{A/H} \to \omega'_A$ donne une section $\delta_H \in H^0(\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}, \mathcal{L})$. On en déduit un faisceau inversible que l'on notera toujours $\mathcal{L}$ sur $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$ et une section $\delta_H \in H^0(\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}, \mathcal{L})$. Ce faisceau est naturellement muni d'une norme (voir [Ka]), et on a pour tout L-point x de $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$ (où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$), $|\delta_H(x)| = p^{-n\deg x}$. En effet, en reprenant les notations précédentes, x provient d'un point x' du schéma formel associé à $\overline{\mathcal{A}}_{ndg,Iw_i}$. Soit A le schéma semi-abélien défini sur O_L au-dessus de x' (quitte à prendre une extension de L), A est le quotient de $\widetilde{G}$, extension d'un tore par un schéma abélien sur O_L, par un réseau étale Y. On renvoie à l'appendice (partie 3.7) pour plus de détails. On a alors un isomorphisme $\omega_A \simeq \omega_{\widetilde{G}}$. De plus, si on note $\widetilde{H}$ l'intersection de H avec $\widetilde{G}[p]$, alors A/H est le quotient de $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ par un réseau étale. On a alors un isomorphisme $\omega_{A/H} \simeq \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{H}}$. Au-dessus de x', le faisceau $\mathcal{L}$ est isomorphe à $(\det \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{H}})^{-1} \otimes \det \omega_{\widetilde{G}}$. Comme $\widetilde{H}$ est un schéma en groupes fini et plat sur O_L, on a bien $|\delta_H(x)| = p^{-n\deg x}$. Cela prouve que la fonction degré, définie a priori point par point, est en fait la valuation d'une fonction analytique.
Soit $\mathcal{L}_i := \mathcal{P}_i^*\mathcal{L}$, et $\delta_{H_{i,g}} := \mathcal{P}_i^*\delta_H$. Alors $\delta_{H_{i,g}} \in H^0(\overline{X}^{an}_{Iw}, \mathcal{L}_i)$, et la norme définie pour δ_H sur $\overline{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg,Iw_i}$ donne naturellement une norme pour $\delta_{H_{i,g}}$, et on a $|\delta_{H_{i,g}}(x)| = p^{-nDeg_i(x)}$ pour tout L-point x de $\overline{X}^{an}_{Iw}$. Cela permet de conclure la proposition. □

Définition 3.2.5. L'espace des formes modulaires surconvergentes est défini par

$$H^0(\overline{X}^{an}_{Iw}, \omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ de $\overline{X}^{mult}_{Iw}$ dans $\overline{X}^{an}_{Iw}$.

Remarque 3.2.6. D'après le théorème 3.1.9, on a

$$H^0(\overline{X}^{an}_{Iw}, \omega^\kappa)^\dagger = \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)^b$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts du lieu ordinaire-multiplicatif dans X^{an}_{Iw}, et où $H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)^b$ désigne les fonctions bornées sur $\mathcal{V}$ (au sens de la norme que nous définirons dans le prochain paragraphe). La définition des formes surconvergentes est donc indépendante du choix combinatoire effectué pour la compactification.

Remarque 3.2.7. Il s'agit d'une définition forte des formes surconvergentes. En effet, l'espace X_{Iw} a un modèle entier $X_{Iw,0}$ définie sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Une définition faible pour les formes surconvergentes est alors une section de ω^κ sur un voisinage strict du lieu ordinaire-multiplicatif dans $X_{Iw,0}^{rig}$, ce dernier espace étant la fibre générique de la complétion formelle de $X_{Iw,0}$ le long de sa fibre spéciale.

Une forme modulaire surconvergente est donc définie sur un espace du type $\overline{X}_{Iw,I}$ avec $I = \prod_{i=1}^h [f_i g - \varepsilon, f_i g]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Les fonctions degré se comportent relativement bien par rapport aux opérateurs de Hecke.

Proposition 3.2.8. *Soit $1 \leq i \leq h$, $x \in \overline{X}_{Iw}^{an}$ et $y \in U_{\pi_i}(x)$. Soit $x_j = Deg_j(x)$, et $y_j = Deg_j(y)$ pour $1 \leq j \leq h$. Alors*

- *$y_j = x_j$ pour $j \neq i$.*
- *$y_i \geq x_i$*

De plus, s'il existe $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$ avec $Deg_i(y) = Deg_i(x)$, alors $x_i \in \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Au-dessus du point x, on dispose d'une variété semi-abélienne A munie d'une action de O_B, définie sur une extension finie M de $\mathbb{Q}_p$, et d'un drapeau complet $H_{j,1} \subset \cdots \subset H_{j,g}$ de $A[\pi_j]$ pour tout j. De même, au-dessus de y, on a une variété semi-abélienne A' et des sous-groupes $H'_{j,k}$, tel que ceux-ci sont obtenus à partir des données précédentes en quotientant par un sous-groupe L de $A[\pi_i]$, qui est un supplémentaire de $H_{i,g}$. De plus, quitte à remplacer M par une de ses extensions finies, il existe un schéma semi-abélien A_0 défini sur O_M, tel que $A = A_0 \otimes_{O_L} L$. Par extension des sous-objets, les sous-groupes $H_{j,k}$ et L de $A[p]$ s'étendent en des sous-groupes $H_{j,k,0}$ et L_0 de $A_0[p]$. De même, l'action de O_B se relève à A_0, et les sous-groupes $H_{k,l,0}$ sont dans $A_0[\pi_k]$. Enfin, il existe un schéma semi-abélien $\widetilde{G}$ sur O_M, extension d'un tore par un schéma abélien, telle que A_0 soit obtenu par la construction de Mumford en quotientant $\widetilde{G}$ par un réseau étale (on renvoie encore à l'appendice pour plus de détails). On a alors une inclusion $\widetilde{G}[p] \subset A_0[p]$; soit $\widetilde{H}_{j,k} = \widetilde{G}[p] \cap H_{j,k,0}$ et $\widetilde{L} = \widetilde{G}[p] \cap L_0$. Soit $H'_{j,k,0}$ l'image de $H_{j,k,0}$ dans A_0/L. Comme $A_0[p] = \oplus_{k=1}^h A_0[\pi_k^{e_k}]$ et que $\widetilde{L}$ est inclus dans $A_0[\pi_i]$, si $j \neq i$, les groupes quasi-finis et plats $H_{j,g,0}$ et $H'_{j,g,0}$ sont isomorphes, et donc $y_j = x_j$. L'élément x_i est égal au degré de $\widetilde{H}_{i,g}$ divisé par n, et comme L est un supplémentaire de $H_{i,g}$ dans $A[\pi_i]$, l'élément y_i est égal au degré de $\widetilde{G}[\pi_i]/\widetilde{L}$ divisé par n. Or par les propriétés de la fonction degré, on a

$$\deg \widetilde{H}_{i,g} + \deg \widetilde{L} \leq \deg (\widetilde{H}_{i,g} + \widetilde{L}) \leq \deg \widetilde{G}[\pi_i]$$

ce qui donne $x_i \leq y_i$.

Pour prouver le second point, supposons qu'il existe $y \in U_{\pi_i^{2e_i}}(x)$ avec $Deg_i(y) = Deg_i(x)$. On dispose au-dessus de x d'un couple $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{k,l})$, et le schéma semi-abélien au-dessus de y est obtenu en quotientant par un sous-groupe L de $A[\pi_i^{2e_i}]$. De plus, comme $A[\pi_i^\infty]$ est muni d'une action de $M_n(F_i)$, il existe un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé G_i muni d'une action de O_{F_i} tel que $A[\pi_i^\infty] = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^n \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_i$. De même le sous-groupe $H_{i,g}$ s'écrit $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \otimes H_{i,g}^0$, où $H_{i,g}^0$ est un sous-groupe de $G_i[\pi_i]$. On voit donc que quitte à travailler avec G_i et $H_{i,g}^0$, on peut se ramener au cas où $n = 1$.

On note $Fil_k = L[\pi_i^k]$, pour $0 \leq k \leq 2e_i$, et $Gr_k = Fil_k/Fil_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq 2e_i$. De même que précédemment, il existe un schéma semi-abélien A_0 défini sur l'anneau des entiers d'une extension finie M de $\mathbb{Q}_p$, étendant le schéma semi-abélien A. L'action de O_B se relève à A_0, de même que les sous-groupes $H_{i,g}$ et L. On notera $H_{i,g,0}$ et L_0 les sous-groupes de $A_0[\pi_i^{2e_i}]$ étendant respectivement $H_{i,g}$ et L. De même, il existe un schéma semi-abélien $\widetilde{G}$, extension d'un tore par un schéma abélien sur O_M, telle que A_0 soit obtenue en quotientant $\widetilde{G}$ par un réseau étale à l'aide de la construction de Mumford. On note $\widetilde{H} = H_{i,g,0} \cap \widetilde{G}[p]$; comme on a supposé $n = 1$, le degré de $\widetilde{H}$ est précisément x_i. De même, on note $\widetilde{Fil}_k = L_0[\pi_i^k] \cap \widetilde{G}[p^2]$ et $\widetilde{Gr}_k = \widetilde{Fil}_k/\widetilde{Fil}_{k-1}$. Notons $\widetilde{H}^{(k)} = (\widetilde{G}/\widetilde{Fil}_{k-1})[\pi_i]/\widetilde{Gr}_k$, nous avons une chaîne de morphismes

$$\widetilde{H} \to \widetilde{H}^{(1)} \to \widetilde{H}^{(2)} \to \cdots \to \widetilde{H}^{(2e_i)}$$

Dans $(\widetilde{G}/\widetilde{Fil}_k)[\pi_i]$, on a deux sous-groupes disjoints : $\widetilde{H}^{(k)}$ et $\widetilde{Gr}_{k+1}$. On a alors

$$\deg \widetilde{H}^{(k)} + \deg \widetilde{Gr}_{k+1} \leq \deg (\widetilde{H}^{(k)} + \widetilde{Gr}_{k+1}) \leq \deg (\widetilde{G}/\widetilde{Fil}_k)[\pi_i]$$

d'où $\deg \widetilde{H}^{(k)} \leq \widetilde{H}^{(k+1)}$ pour tout k. On a donc $\deg \widetilde{H} \leq \deg \widetilde{H}^{(1)} \leq \cdots \leq \deg \widetilde{H}^{(2e_i)}$. Or $Deg_i(x) = \deg \widetilde{H}$, et $Deg_i(y) = \deg \widetilde{H}^{(2e_i)}$, et par hypothèse $Deg_i(x) = Deg_i(y)$. On en déduit que les inégalités précédentes sont en fait des égalités, et que l'on a $\deg \widetilde{H}^{(k)} = Deg_i(x)$ pour tout $0 \leq k \leq 2e_i$.
L'égalité entre degrés montre que l'on a $(\widetilde{G}/\widetilde{Fil}_k)[\pi_i] = \widetilde{H}^{(k)} \oplus \widetilde{Gr}_{k+1}$. On voit que le degré de $\widetilde{Gr}_k$ est constant, et que $\deg \widetilde{Fil}_k = k \deg \widetilde{Fil}_1$. En particulier pour k et l compris entre 0 et e_i, on a $\deg \widetilde{Fil}_{k+l} = \deg \widetilde{Fil}_k + \deg \widetilde{Fil}_l$; d'après les propriétés de la fonction degré, la suite

$$0 \to \widetilde{Fil}_k \to \widetilde{Fil}_{k+l} \xrightarrow{\pi_i^k} \widetilde{Fil}_l \to 0$$

est exacte. En appliquant cette relation pour $k = l = e_i$, on voit que $\widetilde{L}$ est un Barsotti-Tate tronqué d'échelon 2. En particulier, son degré et celui de $\widetilde{Fil}_{e_i}$ sont entiers. La proposition découle de la relation $Deg_i(x) = f_i g - \frac{1}{e_i} \deg \widetilde{Fil}_{e_i}$. □

L'opérateur de Hecke U_{π_i} augmente donc la i-ième fonction degré, et ne modifie pas les autres. De plus, il augmente strictement la fonction Deg_i, sauf éventuellement aux points où cette fonction est un multiple de $1/e_i$. Nous avons même un résultat plus fort.

Proposition 3.2.9. *Soit $1 \leq i \leq h$, k un entier compris entre 0 et $f_i e_i g - 1$ et $0 < \alpha < \beta < 1$ deux rationnels. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Deg_i(y) \geq Deg_i(x) + \varepsilon$, pour tout $x \in Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e_i}, \frac{k+\beta}{e_i}])$ et $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$.*

Démonstration. Définissons C_i comme l'espace de modules sur K paramétrant les (x, L) avec $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}) \in X_{Iw}$ et L un sous-groupe fini et plat de $A[\pi_i^{2e_i}]$, stable par O_B, totalement isotrope et supplémentaire de $H_{i,g}$ dans $A[\pi_i^{2e_i}]$. Notons $\overline{C_i}$ une compactification de C_i compatible avec $\overline{X}_{Iw}^{an}$, et $\overline{C_i}^{an}$ l'espace analytique associé. On dispose d'un morphisme d'oubli $p_1 : \overline{C_i}^{an} \to \overline{X}_{Iw}^{an}$.

On veut définir les degrés de $H_{i,g}$ et $H'_{i,g}$:=Im $(H_{i,g} \to A/L)$ sur $\overline{C_i}^{an}$ comme valuations d'une fonction analytique. Il nous faut pour cela utiliser encore l'espace $\mathcal{A}_{ndg,Iw_i}$. On définit deux morphismes $f_1, f_2 : C_i \to \mathcal{A}_{ndg,Iw_i} \times K$ par $f_1(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L) = (A,\lambda,\eta,H_{i,g})$ et $f_2(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L) = (A/L,\lambda',\eta',H'_{i,g})$. On peut supposer que ces morphismes s'étendent aux compactifications et induisent des morphismes $\overline{C_i}^{an} \to \overline{\mathcal{A}}^{an}_{ndg,Iw_i}$. On démontre comme précédemment qu'il existe des faisceaux inversibles $\mathcal{L}_{H_{i,g}}$, $\mathcal{L}_{H'_{i,g}}$ sur $\overline{C_i}^{an}$, munis d'une norme canonique, et des sections $\delta_{H_{i,g}} \in H^0(\overline{C_i}^{an}, \mathcal{L}_{H_{i,g}})$, $\delta_{H'_{i,g}} \in H^0(\overline{C_i}^{an}, \mathcal{L}_{H'_{i,g}})$, tels que les degrés de $H_{i,g}$ et $H'_{i,g}$ sont égaux (à un facteur près) à la valuation de la norme de ces sections.
D'après la proposition précédente, le degré de $H'_{i,g}$ est strictement supérieur à celui de $H_{i,g}$ sur $p_1^{-1}(Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e_i}, \frac{k+\beta}{e_i}]))$. Le principe du maximum montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que deg $H'_{i,g} \geq$ deg $H_{i,g} + \varepsilon$ sur ce dernier espace car il est quasi-compact. □

Corollaire 3.2.10. *Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition précédente. Alors il existe un entier N tel que*

$$U_{\pi_i}^N \left(Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e_i}, f_i g]) \right) \subset Deg_i^{-1}([\frac{k+\beta}{e_i}, f_i g])$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout entier n, il existe x_n avec $Deg_i(x_n) \in [\frac{k+\alpha}{e_i}, f_i g]$, et $y_n \in U_{\pi_i}^n(x_n)$ avec $Deg_i(y_n) \leq \frac{k+\beta}{e_i}$. Comme l'opérateur U_{π_i} augmente la fonction Deg_i, on a $\frac{k+\alpha}{e_i} \leq Deg_i(x_n) \leq \frac{k+\beta}{e_i}$. Or d'après la proposition précédente, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'opérateur $U_{\pi_i}^{2e_i}$ augmente la fonction Deg_i d'au moins ε sur $Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e_i}, \frac{k+\beta}{e_i}])$. On en déduit que $Deg_i(y_{2e_i n}) \geq n\varepsilon + Deg_i(x_{2e_i n}) \geq n\varepsilon$ ce qui est impossible. □

3.2.2 Normes

Nous souhaitons définir une norme sur l'espace des formes modulaires définies sur un ouvert $\mathcal{U}$ quasi-compact de $\overline{X}^{an}_{Iw}$, c'est-à-dire sur l'espace $H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$. Comme l'espace $\overline{X}^{an}_{Iw}$ ne provient pas (canoniquement) d'un schéma formel défini sur l'anneau des entiers d'une extension de $\mathbb{Q}_p$, on ne peut appliquer directement [Ka]. Bien sûr, il est possible de définir de manière non canonique une norme sur l'espace des sections d'un faisceau localement libre sur un espace rigide, mais il sera difficile de prouver certaines propriétés. (Si Y = Spm A est un espace affinoïde, et $f \in A$, alors la norme de $f(y)$ est définie canoniquement pour $y \in Y$. En revanche, si $\mathcal{F}$ est un faisceau inversible, on peut définir une norme sur $H^0(Y, \mathcal{F})$ qui dépendra de la trivialisation de $\mathcal{F}$.)
Soit $\mathcal{A}_{ndg}$ le schéma sur $\mathbb{Z}_p$ paramétrant les schémas abéliens de dimension ndg, avec une polarisation de degré premier à p, et une structure de niveau N. Soit également $\overline{\mathcal{A}}_{ndg}$ une compactification toroïdale de $\mathcal{A}_{ndg}$ (construite dans [F-C]), avec un choix combinatoire compatible avec celui de $\overline{X}_{Iw}$. On notera A le schéma semi-abélien universel sur $\overline{\mathcal{A}}_{ndg}$. Pour définir le schéma suivant, nous nous inspirons de [Sa2].

Définition 3.2.11. Soit $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ l'espace de modules sur $\mathbb{Z}_p$ dont les S-points sont :

- un point $x \in \overline{\mathcal{A}}_{ndg}(S)$.
- une filtration $0 = \omega_{A,0} \subset \omega_{A,1} \subset \cdots \subset \omega_{A,nd} = \omega_A$ telle que pour tout $1 \leq i \leq nd$, $\omega_{A,i}/\omega_{A,i-1}$ est localement un $\mathcal{O}_S$-facteur direct de $\omega_A/\omega_{A,i-1}$ de rang g.

L'espace $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ est donc un schéma sur $\mathbb{Z}_p$, et est égal à la fibration de $\overline{\mathcal{A}}_{ndg}$ par une grassmannienne. Comme $\overline{\mathcal{A}}_{ndg}$ est propre sur $\mathbb{Z}_p$, $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ l'est également.
Soit $\mathcal{T}_i = Isom_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}}}(\omega_{A,i}/\omega_{A,i-1}, \mathcal{O}^g_{\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}})$ pour $1 \leq i \leq d$. On note $\phi_i : \mathcal{T}_i \to \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ la projection. L'espace $\mathcal{T}_i$ est un torseur sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ pour le groupe GL_g. Si $\kappa_i = (k_j)$ est un élément de $\mathbb{Z}^g$, on note $\omega_i^{\kappa_i} = \phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}[-\kappa_i']$, où $\kappa' = (k_{g+1-j})$, et où $\phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}[-\kappa_i']$ est le sous-faisceau de $\phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}$ où le tore de GL_g agit par $-\kappa_i'$, et où le radical unipotent agit trivialement.
Rappelons que nous avons défini le poids d'une forme modulaire comme un couple $(k_{i,\sigma})_{1\leq i\leq g, \sigma\in\Sigma}$, où Σ est l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$, vérifiant $k_{1,\sigma} \geq \cdots \geq k_{g,\sigma}$, pour tout $\sigma \in \Sigma$. De plus, Σ est l'union disjointe des Σ_i, où Σ_i est l'ensemble des plongements qui se factorisent par F_i. Chaque Σ_i est de cardinal $e_i f_i$. On fixe une numérotation sur chaque Σ_i, c'est-à-dire une bijection entre Σ_i et l'ensemble $\{1, \dots, e_i f_i\}$. Ces choix donne une bijection entre Σ et $\{1, \dots, d\}$. Un poids est donc un couple $(\kappa_i)_{1\leq i\leq d}$, où chaque κ_i est un élément dominant de $\mathbb{Z}^g$. On note alors ω_0^κ le faisceau défini sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ par $\omega_0^\kappa := \otimes_{i=1}^d \omega_i^{\kappa_i}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg}$ l'espace rigide associé à $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg} \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$. Puisque ce dernier est propre sur $\mathbb{Z}_p$, on a $\widetilde{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg} = \widetilde{\mathcal{A}}^{an}_{ndg}$. On notera encore ω_0^κ le faisceau induit sur cet espace. D'après [Ka], on peut définir canoniquement une norme sur l'espace $H^0(\mathcal{U}, \omega_0^\kappa)$, pour tout ouvert quasi-compact $\mathcal{U}$ de $\widetilde{\mathcal{A}}^{rig}_{ndg}$. On notera $\widetilde{\omega}_0^\kappa$ le sous-faisceau des fonctions de norme plus petite que 1.

Le faisceau ω_A défini sur $\overline{X}_{Iw}$ est muni d'une action de $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod_{i=1}^h \mathrm{M}_n(F_i)$. Par équivalence de Morita, la catégorie des $\prod_{i=1}^h \mathrm{M}_n(F_i)$-modules et celle des $\prod_{i=1}^h F_i$-modules sont équivalentes. L'équivalence de catégorie est simplement donnée par $R \to E \cdot R$. On rappelle que $E = \prod_{i=1}^h E_{1,1}$ où $E_{1,1}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1,1)$. Soit donc $\omega_{A,d} = E \cdot \omega_A$. C'est un $\prod_{i=1}^h F_i$-module, et on a

$$\omega_A = \bigoplus_{j=1}^n (\prod_{i=1}^h E_{j,1})\omega_{A,d}$$

Le faisceau ω_A est donc isomorphe à n copies de $\omega_{A,d}$. De plus, ce dernier faisceau est localement libre de rang dg, et muni d'une action de $\prod_{i=1}^h F_i$. On peut donc écrire $\omega_{A,d} = \oplus_{i=1}^h \omega_{A,d,i}$, où $\omega_{A,d,i}$ est un faisceau localement libre de rang $e_i f_i g$ muni d'une action de F_i. On peut alors décomposer ce faisceau suivant les plongements de F_i dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (c'est-à-dire suivant les éléments de Σ_i) : $\omega_{A,d,i} = \oplus_\sigma \omega_{A,d,i}^{(\sigma)}$, où σ parcourt Σ_i, et où $\omega_{A,d,i}^{(\sigma)}$ est un faisceau localement libre de rang g.
Ainsi, en utilisant la bijection entre Σ et $\{1, \dots, d\}$ fixée précédemment, on peut décomposer le faisceau $\omega_{A,d}$ en

$$\omega_{A,d} = \oplus_{j=1}^d \omega_{A,d}^{(j)}$$

où les faisceaux $\omega_{A,d}^{(j)}$ sont localement libres de rang g. Cela permet donc d'écrire ω_A comme somme directe de nd faisceaux localement libre de rang g.

Définition 3.2.12. On définit un morphisme $\psi : \overline{X}_{Iw} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg} \times K$ par la formule $x \to (\mathcal{P}(x), (\omega_{A,\bullet}))$, où $\mathcal{P}$ est le morphisme d'oubli de l'action de O_B et de la structure Iwahorique, et où la filtration $(\omega_{A,\bullet})$ de ω_A est déduite de ce qui précède.

Nous avons défini un faisceau ω^κ sur $\overline{X}_{Iw}$ et un faisceau ω_0^κ sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$.

Proposition 3.2.13. *On a $\psi^*\omega_0^\kappa = \omega^\kappa$.*

Démonstration. Le faisceau ω^κ est défini à l'aide du torseur $\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_{B\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}}(St\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}, \omega_A)$ sur $\overline{X}_{Iw}$, où on rappelle que $St = \oplus_{i=1}^h (F_i^n)^g$. On a donc, par l'équivalence de Morita, et la décomposition $\omega_{A,d} = \oplus_{i=1}^h \omega_{A,d,i}$,

$$\mathcal{T} = \prod_{i=1}^h \mathrm{Isom}_{F_i\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}}(F_i^g \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}, \omega_{A,d,i}) \simeq \prod_{j=1}^d \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}}^g, \omega_{A,d}^{(j)})$$

Le résultat en découle. □

On notera encore $\psi : \overline{X}_{Iw}^{an} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{rig}$ le morphisme obtenu au niveau des espaces analytiques. La proposition 1.1.15 permet donc de définir un modèle entier pour le faisceau ω^κ. Décrivons explicitement la semi-norme obtenue sur l'espace $H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ quasi-compact de $\overline{X}_{Iw}^{an}$. Soit $f \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$, et $x \in \mathcal{U}$. Si on note L le corps résiduel de x, on a donc un morphisme $x : \mathrm{Spec}\ L \to \mathcal{U}$. Alors

$$x^*f \in H^0(\mathrm{Spec}\ L, x^*\omega^\kappa) = H^0(\mathrm{Spec}\ L, x^*\psi^*\omega_0^\kappa) = H^0(\mathrm{Spec}\ L, (\psi x)^*\omega_0^\kappa)$$

Le morphisme $\psi x : \mathrm{Spec}\ L \to \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{rig}$ donne un L-point de $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{rig}$, qui provient d'un unique O_L-point du schéma formel $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{for}$ associé à $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$. On note ψ_0 le morphisme $\mathrm{Spf}\ O_L \to \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{for}$ correspondant. On a alors

$$H^0(\mathrm{Spec}\ L, (\psi x)^*\omega_0^\kappa) = H^0(\mathrm{Spf}\ O_L, \psi_0^*\omega_0^\kappa) \otimes_{O_L} L$$

où O_L est l'anneau des entiers de L (on note encore ω_0^κ le faisceau induit sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{for}$). On définit donc une norme sur $H^0(\mathrm{Spec}\ L, x^*\omega^\kappa)$ en identifiant $H^0(\mathrm{Spf}\ O_L, \psi_0^*\omega_0^\kappa)$ et les éléments de norme plus petite que 1.

Définition 3.2.14. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\overline{X}_{Iw}^{an}$, $f \in H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$, et $x \in \mathcal{U}$. On définit la norme de f en x par $|f(x)| := |x^*f|$, et la norme de f sur $\mathcal{U}$ par $|f|_{\mathcal{U}} := \sup_{x\in\mathcal{U}} |f(x)|$.

Remarque 3.2.15. L'élément $|f|_{\mathcal{U}}$ peut éventuellement être infini, mais est fini si $\mathcal{U}$ est quasi-compact. Dans ce cas, cette définition donne en général une semi-norme, mais est une norme si l'espace est réduit.

Définition 3.2.16. On notera encore $\widetilde{\omega}^\kappa$ le sous-faisceau des fonctions de norme plus petite que 1.

On peut donner une autre définition du faisceau $\widetilde{\omega}^\kappa$ (on renvoie à la preuve de la proposition 1.1.15 pour plus de détails). Pour tout espace rigide Y, on note $\widetilde{\mathcal{O}_Y}$ le faisceau des fonctions de norme inférieure ou égale à 1. Alors

$$\widetilde{\omega}^\kappa = \psi^{-1}\widetilde{\omega}_0^\kappa \otimes_{\psi^{-1}\widetilde{\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}_{ndg}^{rig}}}} \widetilde{\mathcal{O}_{\overline{X}_{Iw}^{an}}}$$

Le faisceau $\widetilde{\omega}^\kappa$ définit donc bien un modèle entier pour ω^κ. Rappelons que si $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de rang r sur un espace rigide Y, un modèle entier pour $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ localement isomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}_Y}^r$.

Rappelons un « gluing lemma » dû à Kassaei ([Ka]). On rappelle que nous avons fait les choix combinatoires de telle sorte que l'espace $\overline{X}_{Iw}$ soit lisse.

Lemme 3.2.17. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de $\overline{X}_{Iw}^{an}$. On a :*

$$H^0(\mathcal{U},\omega^\kappa) \simeq H^0(\mathcal{U},\widetilde{\omega}^\kappa)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \simeq \left(\varprojlim H^0(\mathcal{U},\widetilde{\omega}^\kappa/p^n)\right)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$$

3.3 Décomposition des opérateurs de Hecke

3.3.1 Décomposition

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasi-compact de X_{Iw}^{an}. Fixons un élément i compris entre 1 et g, et un élément rationnel $r \in [0, f_i g]$. On note $X_{i,\leq r} := \{x \in X_{Iw}^{an}, Deg_i(x) \leq r\}$. Nous voulons découper notre ouvert $\mathcal{U}$ suivant le nombre de points de $U_{\pi_i}(x) \cap X_{i,\leq r}$. Pour tout $x = (A,\lambda,\iota,\eta,H_{i,j}) \in X_{Iw}^{an}$, soit $N(x,r)$ le nombre de points de $U_{\pi_i}(x)\cap X_{i,\leq r}$. Définissons

$$\mathcal{U}_j := \{x \in \mathcal{U}, N(x,r) \geq j\}$$

Proposition 3.3.1. *Les $(\mathcal{U}_j)$ forment une suite bonne suite d'ouverts de $\mathcal{U}$.*

On renvoie à la définition 1.2.10 pour la définition d'une bonne suite d'ouverts, et au lemme 1.2.14 pour la preuve. Sur $\mathcal{U}_j \backslash \mathcal{U}_{j+1}$, on a $N(x,r) = j$. On peut alors décomposer l'opérateur U_{π_i} en $U_{\pi_i}^{good} \coprod U_{\pi_i}^{bad}$, où $U_{\pi_i}^{bad}$ correspond aux j points de $X_{i,\leq r}$, et $U_{\pi_i}^{good}$ aux autres. Remarquons que $U_{\pi_i}^{bad}$ paramètre les supplémentaires L de H_i avec deg $L \geq f_i - r$. De plus, il est possible de faire surconverger ces ouverts.

Proposition 3.3.2. *Soit $r' > r$ un nombre rationnel, et $\mathcal{U}'_j := \{x \in \mathcal{U}, N(x,r') \geq j\}$. Alors $\mathcal{U}'_j$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j$ dans $\mathcal{U}$, c'est-à-dire que le recouvrement $(\mathcal{U}'_j, \mathcal{U}\backslash\mathcal{U}_j)$ de $\mathcal{U}$ est admissible.*

Démonstration. Voir la proposition 1.2.18. □

Pour $r' > r$, on dispose donc de la décomposition de U_{π_i} sur $\mathcal{U}_j \backslash \mathcal{U}_{j+1}$, ainsi que sur $\mathcal{U}'_j \backslash \mathcal{U}'_{j+1}$. Ces décompositions coïncident sur l'intersection des deux ensembles.
Il est possible de généraliser cette décomposition à $U_{\pi_i}^N$ pour tout entier N.

Théorème 3.3.3. *Soit $N \geq 1$ et $r \in [0, f_i g]$ un rationnel. Il existe un ensemble fini totalement ordonné S_N et une suite décroissante d'ouverts quasi-compacts $(\mathcal{U}_j(N))_{i \in S_N}$ de $\mathcal{U}$ de longueur $L = L(N)$ indépendante de $\mathcal{U}$, tels que pour tout $j \geq 0$, on peut décomposer la correspondance $U_{\pi_i}^N$ sur $\mathcal{U}_j(N) \backslash \mathcal{U}_{j+1}(N)$ en*

$$U_{\pi_i}^N = \left(\coprod_{k=0}^{N-1} U_{\pi_i}^{N-1-k} \circ T_k \right) \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{\pi_i,j,N}^{good}$, pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \dots, j_k \in S_{N-k}} U_{\pi_i,j_k,N}^{good} U_{\pi_i,j_{k-1},j_k,N}^{bad} \dots U_{\pi_i,j,j_1,N}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{j_1 \in S_{N-1}, \dots, j_{N-1} \in S_1} U_{\pi_i,j_{N-1},N}^{bad} U_{\pi_i,j_{N-2},j_{N-1},N}^{bad} \dots U_{\pi_i,j,j_1,N}^{bad}$$

avec

- *les images des opérateurs $U_{\pi_i,j,N}^{good}$ ($j \in S_k$) sont incluses dans $X_{i,\geq r} = \{x \in X_{rig}, Deg_i(x) \geq r\}$.*
- *les opérateurs $U_{\pi_i,j,l,N}^{bad}$ ($j \in S_k$, $l \in S_{k-1}$) et $U_{\pi_i,j,N}^{bad}$ ($j \in S_1$) sont incluses dans $X_{i,\leq r}$.*

Enfin, si $(\mathcal{U}'_j(N))$ est la suite d'ouverts de $\mathcal{U}$ obtenue pour $r' > r$, alors $\mathcal{U}'_j(N)$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j(N)$ dans $\mathcal{U}$ pour tout j.

Démonstration. C'est le théorème 1.2.19. □

3.3.2 Norme des opérateurs de Hecke

Pour démontrer le théorème de classicité, nous aurons besoin d'un calcul de normes de ces opérateurs de Hecke. Rappelons que la norme d'un opérateur $T : H^0(T(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est défini par

$$\|T\|_{\mathcal{U}} := \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \ |Tf|_{\mathcal{U}} \leq \lambda |f|_{T(\mathcal{U})} \ \forall f \in H^0(T(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \right\}$$

Proposition 3.3.4. *Soit T un opérateur défini sur un ouvert $\mathcal{U}$, égal à U_{π_i}, $U_{\pi_i}^{good}$ ou $U_{\pi_i}^{bad}$. On suppose que l'image de cet opérateur est incluse dans $X_{i,\leq f_i g - c}$ pour un certain $c \geq 0$. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}} \leq p^{f_i g(g+1)/2 - c \inf_{\tau \in \Sigma_i} k_{g,\tau}}$$

Démonstration. Avec les notations de 3.1.4, nous allons majorer la norme du morphisme $p^*(\kappa) : p_2^* \omega^\kappa \to p_1^* \omega^\kappa$, chacun de ces deux faisceaux étant muni de la structure entière induite par celle de ω^κ via les morphismes p_1 et p_2 respectivement.

Soit $x = (A, i, \phi, H, \omega_{A,\sigma,j}) \in X_{Iw}^{an}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $L \subset A[\pi_i]$ un supplémentaire de $H[\pi_i]$ stable par O_B. Alors $\psi(x) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}^{rig}(\overline{\mathbb{Q}_p})$, et on a une variété semi-abélienne A_0 définie sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$ au-dessus de $\psi(x)$, qui étend la variété abélienne A. L'action de O_B s'étend à A_0, et le sous-groupe L s'étend en un sous-groupe L_0 de $A_0[\pi_i]$. De même que précédemment, il existe un schéma semi-abélien $\widetilde{G}$ sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$, globalement extension d'un tore par un schéma abélien, tel que A_0 soit le quotient de $\widetilde{G}$ par un réseau étale. On se référera à l'annexe (partie 3.7) pour plus de détails. On a $\widetilde{G}[p] \subset A_0[p]$; soit $\widetilde{L} = L_0 \cap \widetilde{G}[p]$. C'est un schéma en groupes fini et plat sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$. On a alors des isomorphismes $\omega_{A_0} \simeq \omega_{\widetilde{G}}$ et $\omega_{A_0/L_0} \simeq \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L}}$. Le morphisme $p : A_0 \to A_0/L_0$ donne une suite exacte de $\overline{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}} O_B$-modules

$$0 \to \omega_{A_0/L_0} \to \omega_{A_0} \to \omega_{L_0} \to 0$$

qui s'identifie à

$$0 \to \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L}} \to \omega_{\widetilde{G}} \to \omega_{\widetilde{L}} \to 0$$

En utilisant l'équivalence de Morita, on en déduit une suite exacte de $(\prod_{i=1}^{h} O_{F_i}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Z}_p}$-modules

$$0 \to E \cdot \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L}} \to E \cdot \omega_{\widetilde{G}} \to E \cdot \omega_{\widetilde{L}} \to 0$$

De plus, on sait que ces modules admettent une filtration indexée par les éléments de Σ, et la suite exacte respecte cette filtration. Remarquons que puisque l'on travaille sur $\overline{\mathbb{Z}_p}$, cette filtration est canonique, et est déduite de la décomposition en somme directe de ces modules après inversion de p. On en déduit que les morphismes de la suite exacte sont stricts pour la filtration. Pour tout $1 \leq j \leq d$, on obtient donc une suite exacte

$$0 \to \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L},j}/\omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L},j-1} \overset{f_j}{\to} \omega_{\widetilde{G},j}/\omega_{\widetilde{G},j-1} \to \omega_{\widetilde{L},j}/\omega_{\widetilde{L},j-1} \to 0$$

où $(\omega_{\widetilde{G},j})_{1 \leq j \leq d}$ est la filtration de $E \cdot \omega_{\widetilde{G}}$, et similairement pour $E \cdot \omega_{\widetilde{G}/\widetilde{L}}$ et $E \cdot \omega_{\widetilde{L}}$. On rappelle qu'on a ordonné les éléments de $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$. Si $\sigma_j \notin \Sigma_i$, alors f_j est un isomorphisme puisque $L \subset A[\pi_i]$ donc $\omega_{\widetilde{L},j}/\omega_{\widetilde{L},j-1} = 0$. Soit $\lambda_j = v(\det f_j)$. Alors

$$\|p^*(\kappa)\|_x \leq \prod_{j,\sigma_j \in \Sigma_i} p^{-\lambda_j k_{g,\sigma_j}} \leq p^{-\inf_{\tau \in \Sigma_i} k_\tau \sum_{j,\sigma_j \in \Sigma_i} \lambda_j}$$

La proposition découle alors du fait que $\deg \widetilde{L} = \sum_{j,\sigma_j \in \Sigma_i} \lambda_j \geq c$. □

3.4 Classicité

Théorème 3.4.1. *Soit f une forme surconvergente de poids $\kappa \in X(T_M)^+$ sur X_{Iw}, propre pour la famille d'opérateurs de Hecke U_{π_i}. Supposons que les valeurs propres (α_i) pour ces opérateurs soient non nulles, et que κ est grand devant les $(v(\alpha_i))$. Alors f est classique.*

Remarque 3.4.2. La condition reliant le poids et la pente est très explicite. Un élément $\kappa \in X(T_M)^+$ est une famille d'entiers

$$\prod_{i=1}^{h}\prod_{j=1}^{d_i}(k_{1,j,i} \geq \cdots \geq k_{g,j,i})$$

La condition intervenant dans le théorème est alors

$$\frac{d_i g(g+1)}{2} + e_i v(\alpha_i) < \inf_{1 \leq j \leq d_i} k_{g,j,i}$$

pour tout $1 \leq i \leq h$. On rappelle que $d_i = e_i f_i$.

Passons à la preuve du théorème.
Une forme modulaire surconvergente est définie sur un espace du type

$$\mathrm{Deg}^{-1}([f_1 g - \varepsilon, f_1 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g])$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Pour montrer que f est classique, nous allons tout d'abord prolonger f à tout X_{Iw}^{an}. Le prolongement se fera direction par direction, c'est-à-dire que l'on prolongera f à

$$Deg^{-1}([0, f_1 g] \times [f_2 g - \varepsilon, f_2 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X_{Iw}^{an}$$

puis à

$$Deg^{-1}([0, f_1 g] \times [0, f_2 g] \times [f_3 g - \varepsilon, f_3 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X_{Iw}^{an}$$

et ainsi de suite.
Chacune de ses étapes se démontrant de manière analogue, nous ne détaillerons que la première, c'est-à-dire le prolongement à

$$Deg^{-1}([0, f_1 g] \times [f_2 g - \varepsilon, f_2 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X_{Iw}^{an}$$

Pour conclure, nous utiliserons le théorème 3.1.9, qui permettra d'étendre la forme f à $\overline{X}_{Iw}^{an}$. Un théorème de type GAGA permet ensuite de prouver que f est algébrique, c'est-à-dire que f est une forme classique.

3.4.1 Prolongement automatique

Soit f une forme modulaire surconvergente vérifiant les hypothèses du théorème 3.4.1. Elle est donc définie sur $\mathrm{Deg}^{-1}([f_1 g - \varepsilon, f_1 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g])$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Pour tout intervalle I, notons $\mathcal{U}_I := Deg^{-1}(I \times [f_2 g - \varepsilon, f_2 g] \times \cdots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X_{Iw}^{an}$. La forme f est donc définie sur $\mathcal{U}_{[f_1 g - \varepsilon, f_1 g]}$. Nous allons prolonger f à $\mathcal{U}_{]f_1 g - \frac{1}{e_1}, f_1 g]}$.

Proposition 3.4.3. *Il est possible de prolonger f à $\mathcal{U}_{]f_1 - \frac{1}{e_1}, f_1]}$.*

Démonstration. Soit β un rationnel avec $0 < \beta < \frac{1}{e_1}$. D'après le corollaire 3.2.10, il existe un entier N tel que

$$U_{\pi_1}^N(\mathcal{U}_{[f_1g-\beta,f_1g]}) \subset \mathcal{U}_{[f_1g-\varepsilon,f_1g]}$$

La fonction $f_\beta = a_1^{-N}U_{\pi_1}^N f$ est donc définie sur $\mathcal{U}_{[f_1g-\beta,f_1g]}$, et est égale à f sur $\mathcal{U}_{[f_1g-\varepsilon,f_1g]}$. Nous noterons donc encore f cette fonction. De plus, les $(\mathcal{U}_{[f_1g-\beta,f_1g]})$ pour $0 < \beta < \frac{1}{e_1}$ forment un recouvrement admissible de $\mathcal{U}_{]f_1g-\frac{1}{e_1},f_1g]}$. On peut donc étendre f à ce dernier intervalle. □

Remarque 3.4.4. Pour démontrer cette proposition, nous avons seulement utilisé le fait que la valeur propre α_1 était non nulle.

3.4.2 Séries de Kassaei

Dans cette partie, nous prolongeons la forme f à $\mathcal{U}_{[0,f_1g]}$. Comme les itérés de l'opérateur U_{π_1} n'augmentent pas strictement le degré de $H_{1,g}$ sur cet ouvert, la méthode de la partie précédente ne s'applique pas. Nous allons construire des séries f_n, analogues de celles introduites par Kassaei dans [Ka], qui convergeront vers f. Pour cela, nous utiliserons la décomposition de l'opérateur U_{π_1} réalisée dans la partie 3.3.1.
Soit ε un réel strictement positif tel que $v(\alpha_1) + f_1g(g+1)/2 < (\frac{1}{e_1} - \varepsilon)\inf_{1\leq j\leq d_1} k_{g,j,1}$. Cela est possible d'après les hypothèses du théorème 3.4.1. Soit r un nombre rationnel avec $f_1g - \frac{1}{e_1} < r < f_1g - \frac{1}{e_1} + \varepsilon$, et $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{[0,r]}$.
Soit $N \geq 1$ un entier ; d'après le théorème 3.3.3, on peut trouver une suite d'ouverts $(\mathcal{U}_j)_{j\in S_N}$ de $\mathcal{U}$, et une décomposition de $U_{\pi_1}^N$ sur chaque cran $\mathcal{U}_j\backslash\mathcal{U}_{j+1}$. De plus, il est possible de faire surconverger arbitrairement cette suite d'ouverts. En effet, soit $(r^{(k)})$ une suite strictement croissante de rationnels avec $r^{(0)} = r$, $r^{(k)} < f_1g - \frac{1}{e_1} + \varepsilon$ pour tout k, et $(\mathcal{U}_j^{(k)})$ la suite d'ouverts correspondante à $r^{(k)}$. Alors $\mathcal{U}_j^{(k+1)}$ est un voisinage strict de $\mathcal{U}_j^{(k)}$ dans $\mathcal{U}$ pour tout j,k.
Notons $\mathcal{V}_j = \mathcal{U}_j^{(j-1)}$ pour tout $j \geq 1$, et $\mathcal{V}'_j = \mathcal{U}_j^{(j)}$ pour tout $i \geq 0$. Alors $\mathcal{V}'_j$ est un voisinage strict de $\mathcal{V}_j$ dans $\mathcal{U}$. Nous avons décomposé l'opérateur $U_{\pi_1}^N$ sur $\mathcal{V}'_j\backslash\mathcal{V}_{j+1}$ en

$$U_{\pi_1}^N = \coprod_{k=0}^{N-1} U_{\pi_1}^{N-1-k}T_k \coprod T_N$$

avec $T_0 = U_{\pi_1,j}^{good}$ et pour $0 < k < N$

$$T_k = \coprod_{j_1\in S_{N-1},\dots,j_k\in S_{N-k}} U_{\pi_1,j_k}^{good}U_{\pi_1,j_{k-1},j_k}^{bad}\dots U_{\pi_1,j,j_1}^{bad}$$

et

$$T_N = \coprod_{j_1\in S_{N-1},\dots,j_{N-1}\in S_1} U_{\pi_1,j_{N-1}}^{bad}U_{\pi_1,j_{N-2},j_{N-1}}^{bad}\dots U_{\pi_1,j,j_1}^{bad}$$

Les images de $U^{good}_{\pi_1,j}$ et de $U^{good}_{\pi_1,j_k}$ ($j_k \in S_{N-k}$) sont incluses dans $\mathcal{U}_{[r^{(j)},f_1 g]} \subset \mathcal{U}_{[r,f_1 g]}$, et les opérateurs $U^{bad}_{\pi_1,i,j}$, $U^{bad}_{\pi_1,j}$ ne font intervenir que des supplémentaires L de degré supérieur à $f_1 g - \ r^{(j)} > \frac{1}{e_1} - \varepsilon$.

Définition 3.4.5. Les séries de Kassaei sur $\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}$ sont définies par

$$f_{N,j} := \alpha_1^{-1} U^{good}_{\pi_1,j} f + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j_1 \in S_{N-1},\dots,j_k \in S_{N-k}} \alpha_1^{-k-1} U^{bad}_{\pi_1,j,j_1} \dots U^{bad}_{\pi_1,j_{k-1},j_k} U^{good}_{\pi_1,j_k} f$$

Cette fonction est bien définie, puisque les opérateurs $U^{good}_{\pi_1,j}$ sont soit nuls, auquel cas leur action sur f donne 0, soit à valeurs dans $\mathcal{U}_{[r,f_1 g]}$ et f est définie sur cet espace. Ce dernier espace étant quasi-compact, f y est bornée, disons par M.
La proposition 3.3.4 permet de majorer la norme des opérateurs $\alpha_1^{-1} U^{bad}_{p,j,k}$: la norme de ces opérateurs est inférieure à

$$u_0 = p^{f_1 g(g+1)/2 + v(\alpha_1) - (\frac{1}{e_1} - \varepsilon) \inf_{1 \leq j \leq d_1} k_{g,j,1}} < 1$$

Lemme 3.4.6. *Les fonctions $f_{N,i}$ sont uniformément bornées.*

Démonstration. On a

$$|\alpha_1^{-k-1} U^{bad}_{\pi_1,j,j_1} \dots U^{bad}_{\pi_1,j_{k-1},j_k} U^{good}_{\pi_1,j_k} f|_{\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}} \leq u_0^k |\alpha_1^{-1} U^{good}_{\pi_1,j_k} f|_{U^{bad}_{\pi_1,j_{k-1},j_k} \dots U^{bad}_{\pi_1,j,j_1}(\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1})} \leq |\alpha_1^{-1}| p^{f_1 g(g+1)/2} M$$

car la norme de $U^{good}_{\pi_1,j_k}$ est majorée par $p^{f_1 g(g+1)/2}$. On peut donc majorer la fonction $f_{N,j}$ par

$$|f_{N,j}|_{\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}} \leq |\alpha_1^{-1}| p^{f_1 g(g+1)/2} M$$

ce qui prouve que les fonctions $f_{N,j}$ sont uniformément bornées. □

Puisque ces fonctions sont bornées, nous pouvons supposer qu'elles sont de norme inférieure à 1, quitte à multiplier f par une constante. Nous allons maintenant recoller ces fonctions sur $\mathcal{U}$.

Lemme 3.4.7. *Soient $j, k \in S_N$ et $x \in (\mathcal{V}'_j \backslash \mathcal{V}_{j+1}) \cap (\mathcal{V}'_k \backslash \mathcal{V}_{k+1})$. Alors*

$$|(f_{N,j} - f_{N,k})(x)| \leq u_0^N M$$

Démonstration. Il existe une autre manière de définir les séries de Kassaei $f_{N,j}$. En effet, on aurait pu décomposer l'opérateur $U^N_{\pi_1}$ en $U^{N,good}_{\pi_1} + U^{N,bad}_{\pi_1}$ suivant les degrés des points de $U^N_{\pi_1}$: l'image de $U^{N,good}_{\pi_1}$ est incluse dans $Deg_1^{-1}(]s, f_1 g])$, et celle de $U^{N,bad}_{\pi_1}$ dans $Deg_1^{-1}([0, s])$, pour un certain rationnel s compris entre r et $f_1 g - 1/e_1 + \varepsilon$. La série de Kassaei est alors définie comme $\alpha_1^{-N} U^{N,good}_{\pi_1} f$. La série de Kassaei $f_{N,j}$ est définie à l'aide d'un rationnel s comme précédemment ; au-dessus du point x on peut donc décomposer l'opérateur $U^N_{\pi_1}$ en $U^{N,good}_{\pi_1} + U^{N,bad}_{\pi_1}$, avec $f_{N,j}(x) = \alpha_1^{-N} U^{N,good}_{\pi_1} f(x)$. De même, la série $f_{N,k}$ est définie à l'aide d'un rationnel s', et au-dessus de x, on a la décomposition

$U_{\pi_1}^N = U_{\pi_1}^{N,good'} + U_{\pi_1}^{N,bad'}$, avec $f_{N,k}(x) = \alpha_1^{-N} U_{\pi_1}^{N,good'} f(x)$.
Supposons par exemple que $k < j$. On a alors $s' < s$, et au-dessus de x, l'opérateur $U_{\pi_1}^{N,bad}$ se décompose en $U_{\pi_1}^{N,bad'} + U_{\pi_1}^{N,bad''}$, l'opérateur $U_{\pi_1}^{N,bad''}$ ayant son image incluse dans $Deg_1^{-1}(]s', s])$. On a alors $f_{N,k}(x) - f_{N,j}(x) = \alpha_1^{-N} U_{\pi_1}^{N,bad''} f(x)$. De plus, la norme de de l'opérateur $\alpha_1^{-N} U_{\pi_1}^{N,bad''}$ est inférieure à u_0^N d'après les calculs sur les normes des opérateurs de Hecke. D'où

$$|(f_{N,j} - f_{N,k})(x)| \leq u_0^N |f|_{U_{\pi_1}^{N,bad''}(x)}$$

De plus, l'ensemble $U_i^{N,bad''}(x)$ étant inclus dans $Deg_1^{-1}([r, f_1 g])$, on a $|f|_{U_i^{N,bad''}(x)} \leq M$ ce qui donne la majoration. □

Proposition 3.4.8. *Il existe un entier A_N telle que les fonctions $(f_{N,j})_{j \in S_N}$ se recollent en une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.*

Démonstration. La décomposition de l'ouvert $\mathcal{U}$ étant finie, soit L tel que $\mathcal{V}_{L+1}$ soit vide.
La fonction $f_{N,L}$ est donc définie sur $\mathcal{V}'_L$. La fonction $f_{N,L-1}$ est définie sur $\mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L$.
De plus, d'après le lemme précédent, on a

$$|f_{N,L-1} - f_{N,L}|_{(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L} \leq u_0^N M$$

Soit A_N tel que $u_0^N M \leq p^{-A_N}$; comme $u_0 < 1$, la suite (A_N) tend vers l'infini.
Les fonctions $f_{N,L-1}$ et $f_{N,L}$ sont donc égales modulo p^{A_N} sur $(\mathcal{V}'_L \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_L$. Comme $(\mathcal{V}'_L \cap \ \mathcal{V}'_{L-1}, \mathcal{V}'_{L-1} \backslash \mathcal{V}_L)$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{V}'_{L-1}$, celles-ci se recollent en une fonction $g_{N,L-1} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-1}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
De même, $g_{N,L-1}$ et $f_{N,L-2}$ sont égales (modulo p^{A_N}) sur $(\mathcal{V}'_{L-2} \cap \mathcal{V}'_{L-1}) \backslash \mathcal{V}_{L-1}$, et donc se recollent en $g_{N,L-2} \in H^0(\mathcal{V}'_{L-2}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$.
En répétant ce processus, on voit que les fonctions $f_{N,j}$ se recollent toutes modulo p^{A_N} sur $\mathcal{V}'_0 = \mathcal{U}$, et définissent donc une fonction $g_N \in H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^{A_N})$. □

Proposition 3.4.9. *Les fonctions (g_N) définissent un système projectif dans $\varprojlim H^0(\mathcal{U}, \tilde{\omega}^\kappa / p^m)$.*

Démonstration. Nous allons prouver que g_{N+1} et g_N sont égales modulo p^{A_N}. Soit $x \in \mathcal{U}$; nous avons construit en x les séries de Kassaei $f_{N,j}$ et $f_{N+1,k}$. Or le terme $f_{N+1,k}$ provient d'une décomposition de $U_{\pi_1}^{N+1}$ du type

$$U_{\pi_1}^{N+1} = \sum_{l=0}^{N} U_{\pi_1}^{N-l} T_N + T_{N+1}$$

Nous pouvons donc écrire $f_{N+1,k} = h_1 + h_2$, la fonction h_1 étant associée à l'opérateur $\sum_{l=0}^{N-1} U_{\pi_1}^{N-1-l} T_N$ et h_2 à T_N.
Or la fonction h_1 est en réalité une série de Kassaei pour une certaine décomposition de $U_{\pi_1}^N$: le lemme précédent donne donc

$$|(f_{N,j} - h_1)(x)| \leq p^{-A_N}$$

De plus, on a
$$h_2 = \sum_{j_1 \in S_N, \dots, j_N \in S_1} \alpha_1^{-N-1} U^{bad}_{\pi_1, j, j_1} \dots U^{bad}_{\pi_1, j_{N-1}, j_N} U^{good}_{\pi_1, j_N} f$$
donc comme les opérateurs $\alpha_1^{-1} U^{bad}_{\pi_1, i, l}$ ont une norme inférieure à u_0,
$$|h_2(x)| \leq u_0^N p^{f_1} |\alpha_1^{-1}| M \leq p^{-A'_N}$$
avec $A'_N = A_N - f_1 - v(\alpha_1)$. Quitte à remplacer A_N par A'_N, on voit donc que la réduction de g_{N+1} modulo p^{A_N} est égal à g_N. □

En utilisant le gluing lemma (lemme 3.2.17), on voit donc que les fonctions g_N définissent une fonction $g \in H^0(\mathcal{U}_0, \omega^\kappa)$ pour tout ouvert quasi-compact $\mathcal{U}_0$ inclus dans $\mathcal{U}$, donc un élément de $H^0(\mathcal{U}_0, \omega^\kappa)$. Bien sûr, g coïncide avec f sur $\mathcal{U}_{]f_1 g - \frac{1}{e_1}, f_1 g]}$.
En effet, si $x \in \mathcal{U}_{]f_1 g - \frac{1}{e_1}, f_1 g]}$, il existe N_0 tel que $U^N_{\pi_1}(x) \subset \mathcal{U}_{[f_1 g - \varepsilon, f_1 g]}$ pour $N \geq N_0$, et la série de Kassaei est alors stationnaire égale à
$$\alpha_1^{-N_0} U^{N_0}_{\pi_1} f = f$$
Nous pouvons donc étendre f à $\mathcal{U}_{[0, f_1 g]}$.

3.4.3 Fin de la démonstration

Nous avons étendu f à $\mathcal{U}_{[0,f_1 g]} = Deg^{-1}([0, f_1 g] \times [f_2 g - \varepsilon, f_2 g] \times \dots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X^{an}_{Iw}$. En utilisant le fait que f soit propre pour U_{π_2}, et en utilisant la relation vérifiée par la valeur propre α_2, la même méthode montre que l'on peut étendre f à
$$\mathrm{Deg}^{-1}([0, f_1 g] \times [0, f_2 g] \times [f_3 g - \varepsilon, f_3 g] \times \dots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g]) \cap X^{an}_{Iw}$$
En répétant ce processus, on voit donc que l'on peut étendre f à tout X^{an}_{Iw}.
Nous avons donc étendu à la fonction f en un élément de $H^0(X^{an}_{Iw}, \omega^\kappa)$. Il nous reste encore à montrer que f s'étend au bord. Dans le cas où $dg > 1$, et dans le cas algébrique, le principe de Koecher nous assure que l'on peut négliger les pointes dans la définition des formes modulaires (voir [La2]). Il doit sans doute être possible de déduire un analogue analytique de ce résultat, c'est-à-dire démontrer que toute forme modulaire définie sur X^{an}_{Iw} s'étend à $\overline{X}^{an}_{Iw}$. Néanmoins, dans notre cas, il est possible de raisonner plus simplement, et en ne supposant pas que $dg > 1$. Nous allons pour cela utiliser le théorème 3.1.9 : il nous suffit de prouver que la forme f est bornée sur X^{an}_{Iw} pour prouver qu'elle s'étend au bord.

Proposition 3.4.10. *La forme f est bornée sur X^{an}_{Iw}.*

Démonstration. Rappelons que nous étions partis d'une section définie sur
$$\mathrm{Deg}^{-1}([f_1 g - \varepsilon, f_1 g] \times \dots \times [f_h g - \varepsilon, f_h g])$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Comme cet espace est quasi-compact, f y est automatiquement bornée. Nous allons maintenant démontrer, qu'à chaque étape du prolongement, f reste bornée.
Regardons par exemple l'extension de f à $\mathcal{U}_{[0,f_1 g]}$. La forme f est obtenue en recollant les séries de Kassaei g définies sur $\mathcal{U}_{[0,r]}$, et une forme f_0 définie sur $\mathcal{U}_{[r',f_1 g]}$ par la formule $f_0 = \alpha_1^{-N} U_{\pi_1}^N f$, où r et r' sont des rationnels vérifiant

$$f_1 g - \frac{1}{e_1} < r' < r < f_1 g$$

Comme l'opérateur U_{π_1} est borné, f_0 est bornée. De plus, comme cela a été vu dans le paragraphe précédent, les séries définissant g sont uniformément bornées. On en déduit que le prolongement de f à $\mathcal{U}_{[0,f_1 g]}$ est borné. □

Puisque f est bornée sur X_{Iw}^{an}, on en déduit d'après le théorème 3.1.9 qu'elle s'étend à $\overline{X}_{Iw}^{an}$. Comme $\overline{X}_{Iw}$ est propre, on en déduit par GAGA que f provient d'un élément de $H^0(\overline{X}_{Iw}, \omega^\kappa)$, soit que f est classique.

3.5 Cas des variétés de type (A)

3.5.1 Données et variétés de Shimura

Rappelons les données paramétrant les variétés de Shimura PEL de type (A) (voir [Ko]). Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. Soit F le centre de B et F_0 le sous-corps de F fixé par $\star$. Le corps F_0 est une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$, soit d son degré. Faisons les hypothèses suivantes :
- $[F : F_0] = 2$.
- Pour tout plongement $F_0 \to \mathbb{R}$, $B \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et l'involution $\star$ est donnée par $A \to \overline{A}^t$.

Soit également $(U_\mathbb{Q}, \langle , \rangle)$ un B-module hermitien non dégénéré. Soit G le groupe des automorphismes du B-module hermitien $U_\mathbb{Q}$; pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, on a donc

$$G(R) = \{(g,c) \in GL_B(U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R) \times R^*, \langle gx, gy \rangle = c\langle x, y \rangle \text{ pour tout } x, y \in U_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} R\}$$

Soient $\tau_1, \dots, \tau_d$ les plongements de F_0 dans $\mathbb{R}$; soit également σ_i et $\overline{\sigma_i}$ les deux plongements de F dans $\mathbb{C}$ étendant τ_i. Le choix de σ_i donne un isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. On a également $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $U_i = U_\mathbb{Q} \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R}$. D'après l'équivalence de Morita, $U_i \simeq \mathbb{C}^n \otimes W_i$, où B_i agit sur le premier facteur et W_i est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La structure anti-hermitienne sur U_i en induit une sur W_i, et on note (a_i, b_i) sa signature. Alors $G_\mathbb{R}$ est isomorphe à

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^d \mathrm{U}(a_i, b_i)\right)$$

où $a_i + b_i$ est indépendant de i et vaut $\frac{1}{2nd}\dim_\mathbb{Q} U_\mathbb{Q}$.
Donnons-nous également un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B U_\mathbb{R}$ tel que $\langle h(z)v, w \rangle = \langle v, h(\overline{z})w \rangle$

et $(v,w) \to \langle v, h(i)w\rangle$ est définie positive. Ce morphisme définit donc une structure complexe sur $U_{\mathbb{R}}$: soit $U_{\mathbb{C}}^{1,0}$ le sous-espace de $U_{\mathbb{C}}$ pour lequel $h(z)$ agit par la multiplication par z.
On a alors $U_{\mathbb{C}}^{1,0} \simeq \prod_{i=1}^d (\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$ en tant que $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^d \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$-module (l'action de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur $(\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$ est l'action standard sur le premier facteur et l'action conjuguée sur le second) .
Soient également un ordre O_B de B stable par $\star$, et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ tel que l'accouplement $\langle,\rangle$ restreint à $U \times U$ soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous ferons également les hypothèses suivantes :

- $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.
- O_B est un ordre maximal en p.
- L'accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

Soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p ; O_B est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module libre. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ une base de ce module, et

$$\det_{U^{1,0}} = f(X_1, \ldots, X_t) = \det(X_1\alpha_1 + \cdots + X_t\alpha_t; U_{\mathbb{C}}^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_t])$$

On montre ([Ko]) que f est un polynôme à coefficients algébriques. Le corps de nombres E engendré par ses coefficients est appelé le corps réflexe.
Soit $p = \prod_{i=1}^h \pi_i^{e_i}$ la décomposition de p dans F_0, et soit f_i le degré résiduel de chacune de ces places. On notera Σ l'ensemble des plongements de F_0 dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et Σ_i le sous-ensemble des plongements envoyant π_i dans l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}_p}$. On notera également $F_{0,i}$ la complétion de F_0 en π_i, et $O_{F_{0,i}}$ son anneau des entiers. Alors $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \prod_{i=1}^h B_i$, où B_i est la complétion de B en π_i. Pour déterminer la structure de B_i ,on peut distinguer 3 cas.

- Cas 1 : π_i est décomposé dans F. Alors $B_i \simeq \mathrm{M}_n(F_{0,i}) \oplus \mathrm{M}_n(F_{0,i})$.
- Cas 2 : π_i est inerte dans F. Alors $B_i \simeq \mathrm{M}_n(F_i)$, où F_i est la complétion de F en π_i.
- Cas 3 : π_i est ramifié dans F, $\pi_i = \varpi_i^2$. Alors $B_i \simeq \mathrm{M}_n(F_i)$, où F_i est la complétion de F en ϖ_i.

Définissons maintenant la variété de Shimura PEL de type (A) associée à G. Soit K une extension de $\mathbb{Q}_p$ contenant les images de tous les plongements possibles $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ et $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Définition 3.5.1. Soit X l'espace de modules sur $\mathrm{Spec}(K)$ dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où

- $A \to S$ est un schéma abélien
- $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.
- $\iota : O_B \to \mathrm{End}\, A$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{U^{1,0}}$ et $\det_{Lie(A)}$ sont égaux.

– $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique O_B-linéaire, qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique O_B-linéaire

$$H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_f^p$$

La condition du déterminant est explicite : si $S = \mathrm{Spec}(R)$, cela signifie que le faisceau conormal ω_A est isomorphe à $St \otimes_K R$ comme $B \otimes_{\mathbb{Q}} R$-module, où St est défini par $St = \oplus_{i=1}^h St_i$, et St_i est le B_i-module égal à

$$\bigoplus_{\tau \in \Sigma_i} (K^{a_\tau})^n \oplus (K^{b_\tau})^n$$

où Σ_i =Hom$(F_{0,i}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$, et où $B_i = \mathrm{M}_n(F_{0,i}) \oplus \mathrm{M}_n(F_{0,i})$ agit par l'action standard donnée par τ sur chacun des facteurs dans le cas 1 ; et

$$\bigoplus_{\tau \in \Sigma_i} (K^{a_\tau})^n \oplus (K^{b_\tau})^n$$

où l'action standard de $\mathrm{M}_n(F_i)$ est donnée par σ sur le premier facteur, et par $\overline{\sigma}$ sur le deuxième (avec σ et $\overline{\sigma}$ les deux plongements de F_i au-dessus de τ) dans les cas 2 et 3.

Remarque 3.5.2. Le schéma X est en fait défini sur le corps réflexe, mais nous aurons besoin d'élargir le corps de base pour définir certains faisceaux ultérieurement.

Pour définir les formes surconvergentes, nous aurons besoin de supposer que le lieu ordinaire de la variété de Shimura est non-vide. Dans le cas où p est non ramifié dans F, un résultat de Wedhorn ([We]) dit que cela est le cas si et seulement si p est totalement décomposé dans le corps réflexe E. Si le corps F est fixé, cela donne une condition sur les nombres (a_σ, b_σ). Ainsi, si on se place dans le cas le plus simple où $F_0 = \mathbb{Q}$, $B = F$, on considère la variété associée au groupe $GU(a,b)$. Le corps réflexe est égal à $\mathbb{Q}$ si $a = b$ et F sinon. L'existence du lieu ordinaire est alors équivalente à p décomposé dans F ou $a = b$. Nous allons obtenir des conditions nécessaires sur les couples (a_σ, b_σ) dans le cas général.

Proposition 3.5.3. *Supposons que le lieu ordinaire soit non vide. Soit* $1 \leq i \leq h$, *et supposons que* π_i *soit dans le cas* 1. *Alors il existe des entiers* a_i *et* b_i *tels que* $(a_\sigma, b_\sigma) = (a_i, b_i)$ *pour tout* $\sigma \in \Sigma_i$. *Si* π_i *est dans le cas* 2 *ou* 3, *alors* $a_\sigma = b_\sigma = (a+b)/2$ *pour tout* $\sigma \in \Sigma_i$.

Démonstration. Supposons l'existence du lieu ordinaire. Cela veut dire qu'il existe une variété abélienne A sur une extension L de $\mathbb{Q}_p$, qui s'étend en un schéma semi-abélien A_0 (sur une extension finie de L), tel que $A_0[p^\infty]$ soit un groupe de Barsotti-Tate ordinaire (c'est-à-dire extension d'une partie multiplicative et d'une partie étale). En particulier, pour tout $1 \leq i \leq h$, $A_0[\pi_i^\infty]$ est ordinaire. Supposons que π_i est dans le cas 1, et soit π_i^+ une place de F au-dessus de π_i. Le groupe de Barsotti-Tate $A_0[(\pi_i^+)^\infty]$ est ordinaire, et munie d'une action de $O_{F_{0,i}}$. On en déduit qu'il existe des entiers N_1 et N_2 tels que

$$A_0[(\pi_i^+)^\infty] = (\mu_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_{0,i}})^{N_1} \times (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_{0,i}})^{N_2}$$

En particulier, si on ordonne le couple (a_σ, b_σ) tels que a_σ corresponde au plongement au-dessus de π_i^+, on voit que a_σ ne dépend pas de $\sigma \in \Sigma_i$. De même pour b_σ. Il existe donc un couple d'entiers (a_i, b_i) tels que $(a_\sigma, b_\sigma) = (a_i, b_i)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_i$. Dans le cas 2 ou 3, si O_{F_i} désigne l'anneau des entiers de F_i, on voit de même qu'il existe des entiers N_1 et N_2 tels que

$$A_0[\pi_i^\infty] = (\mu_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_i})^{N_1} \times (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_i})^{N_2}$$

(en fait $N_1 = N_2$ par auto-dualité). On en déduit que pour tout $\sigma \in \Sigma_i$, $a_\sigma = b_\sigma = (a+b)/2$. □

Définissons maintenant la structure de niveau Iwahorique. Si π_i est dans le cas 1, on notera π_i^+ et π_i^- les idéaux de F au-dessus de π_i, et (a_i, b_i) le couple (a_σ, b_σ). Si π_i est dans le cas 2 ou 3, on notera également $a_i = b_i = (a+b)/2$, de telle sorte que l'on ait encore $a_\sigma = a_i$ et $b_\sigma = b_i$ pour tout $\sigma \in \Sigma_i$.

Définition 3.5.4. Soit X_{Iw} l'espace de modules sur K dont les S-points sont les $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{i,j})$ où $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$ et

- Si π_i est dans le cas 1, $\big(0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a+b} = A[\pi_i^+]\big)$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats de $A[\pi_i^+]$, stables par O_B, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur nf_ij.
- Si π_i est dans le cas 2, $\big(0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,(a+b)/2}\big)$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats de $A[\pi_i]$, stables par O_B et totalement isotropes, chaque $H_{i,j}$ étant de hauteur $2nf_ij$.
- Si π_i est dans le cas 3, $\big(0 = H_{i,0} \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,(a+b)/2}\big)$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats de $A[\pi_i]$, stables par O_B et totalement isotropes, chaque $H_{i,j}$ isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_B/\pi_i O_B)^j$.

Remarque 3.5.5. Dans le cas 1, les sous-groupes $A[\pi_i^+]$ et $A[\pi_i^-]$ de $A[\pi_i]$ sont duaux pour l'accouplement de Weil. Si H est un sous-groupe de $A[\pi_i^+]$, alors son orthogonal $H^\perp$ est un sous-groupe de $A[\pi_i^-]$ isomorphe au dual de Cartier de $A[\pi_i^+]/H$.

Remarque 3.5.6. Dans le cas 3, le groupe $A[\varpi_i]$ est totalement isotrope, ce qui justifie le fait que l'on travaille avec $A[\pi_i]$ plutôt que $A[\varpi_i]$.

On notera $\overline{X}$ et $\overline{X}_{Iw}$ des compactifications toroïdales de X et X_{Iw} construites par exemples dans [Pin]. Soient également X^{an}, X_{Iw}^{an}, $\overline{X}^{an}$ et $\overline{X}_{Iw}^{an}$ les espaces analytiques associés.

3.5.2 Formes modulaires et opérateurs de Hecke

Soit A le schéma semi-abélien universel sur $\overline{X}$, et soit $\omega_A = e^*\Omega^1_{A/\overline{X}}$ le faisceau conormal relatif à la section unité de A ; il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $St \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ comme $B \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$-module. Rappelons que $St = \oplus_{i=1}^h St_i$, et St_i est le $B_i \otimes_{\mathbb{Q}} K$-module égal à $\oplus_{\tau \in \Sigma_i} (K^{a_\tau})^n \oplus (K^{b_\tau})^n$.

Soit $\mathcal{T}$ =Isom$_{B\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}}}(St\otimes\mathcal{O}_{\overline{X}},\omega_A)$. C'est un torseur sur $\overline{X}$ sous le groupe

$$M=\left(\prod_{i=1}^{h}\prod_{\tau\in\Sigma_i}\mathrm{GL}_{a_\tau}\times\mathrm{GL}_{b_\tau}\right)\times_{\mathbb{Q}_p}K$$

Soit T_M le tore diagonal de M, B_M son Borel supérieur, et U_M le radical unipotent. Soit $X(T_M)$ le groupe des caractères de T_M, et $X(T_M)^+$ le cône des poids dominants pour B_M. Si $\kappa\in X(T_M)^+$, on note $\kappa'=-w_0\kappa\in X(T_M)^+$, où w_0 est l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement à T_M.
Soit $\phi:\mathcal{T}\to\overline{X}$ le morphisme de projection.

Définition 3.5.7. Soit $\kappa\in X(T_M)^+$. Le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa=\ \phi_*O_{\mathcal{T}}[\kappa']$, où $\phi_*O_{\mathcal{T}}[\kappa']$ est le sous-faisceau de $\phi_*O_{\mathcal{T}}$ où $B_M=T_MU_M$ agit par κ' sur T_M et trivialement sur U_M.

Une forme modulaire de poids κ sur $\overline{X}$ est donc une section globale de ω^κ, soit un élément de $H^0(\overline{X},\omega^\kappa)$. En utilisant la projection $\overline{X}_{Iw}\to\overline{X}$, on définit de même le faisceau ω^κ sur $\overline{X}_{Iw}$, ainsi que les formes modulaires sur $\overline{X}_{Iw}$. On notera encore ω^κ le faisceau analytifié sur $\overline{X}_{Iw}^{an}$.

Définissons maintenant les opérateurs de Hecke. Soit $1\le i\le h$, et C_i l'espace de modules sur K dont les S-points sont les $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L)$ avec $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k})\in X_{Iw}(S)$ et L un sous-groupe fini et plat stable par O_B de $A[\pi_i]$ vérifiant

- $L=L_0\oplus L_0^\perp$, où L_0 est un supplémentaire de H_{i,a_i} dans $A[\pi_i^+]$ dans le cas 1.
- L est totalement isotrope, et est un supplémentaire de H_{i,a_i} dans $A[\pi_i]$ dans le cas 2 ou 3.

Nous avons deux morphismes finis étales $p_1,p_2:C_i\to X_{Iw}$: p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L. Plus précisément :

- dans le cas 1, l'image de de $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L=L_0\oplus L_0^\perp)$ est $(A/L,\lambda',\iota',\eta',H'_{j,k})$, où $H'_{j,k}$ est l'image de $H_{j,k}$ dans A/L si $j\neq i$ ou $j=i$ et $k\le a_i$, et $H'_{i,k}$ est l'image de $(\pi_i^+)^{-1}(H_{i,k}\cap L_0)$ dans A/L si $k>a_i$.
- dans le cas 2 ou 3, l'image de $(A,\lambda,\iota,\eta,H_{j,k},L)$ est $(A/L,\lambda',\iota',\eta',H'_{j,k})$ où $H'_{j,k}$ est l'image de $H_{j,k}$ dans A/L.

La polarisation λ' est définie comme la polarisation descendue $x_i\cdot\lambda$, où x_i est un élément totalement positif fixé de O_{F_0}, de valuation π_j-adique 1 si $j=i$ et 0 sinon. Soit C_i^{an} l'espace analytique associé à C_i ; on note encore p_1, $p_2:C_i^{an}\to X_{Iw}^{an}$ les morphismes (finis étales) induits. Il existe une compactification toroïdale $\overline{C}_i$ de C_i, et on peut supposer (par le théorème 3.1.3) que les morphismes $p_1,p_2:C_i\to X_{Iw}$ s'étendent en des morphismes $\overline{C}_i\to\ \overline{X}_{Iw}$. Si on note $\overline{C}_i^{an}$ l'espace rigide analytique associé à $\overline{C}_i$, on obtient des morphismes $p_1,p_2:\overline{C}_i^{an}\to\overline{X}_{Iw}^{an}$.

Définition 3.5.8. L'opérateur de Hecke géométrique agissant sur $\overline{X}_{Iw}^{an}$ est défini par $U_{\pi_i}(S):=p_2(p_1^{-1}(S))$ pour toute partie S de $\overline{X}_{Iw}^{an}$.

Cet opérateur respecte les ouverts de X_{Iw}^{an}, mais pas ceux de $\overline{X}_{Iw}^{an}$ en général. Notons $p : A \to A/L$ l'isogénie universelle au-dessus de C_i. Celle-ci induit un isomorphisme $p^* : \omega_{A/L} \to \omega_A$, et donc un morphisme $p^*(\kappa) : p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X_{Iw}^{an}, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_{\pi_i} : H^0(U_{\pi_i}(\mathcal{U}), \omega^\kappa) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa) \overset{p^*(\kappa)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$$

Définition 3.5.9. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est alors défini par $U_{\pi_i} = \frac{1}{p^{N_i}}\widetilde{U}_{\pi_i}$ avec $N_i = f_i a_i b_i$.

Nous avons donc défini h opérateurs agissant sur les formes modulaires définies sur un ouvert de X_{Iw}^{an}, qui commutent entre eux. De même que dans le cas précédent, comme ces opérateurs sont bornés, ils agissent sur l'espace $H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)$. En effet, l'image par U_{π_i} d'une telle section sera bornée, et s'étendra automatiquement au bord d'après le théorème 3.1.9.

3.5.3 Structures entières

Nous allons maintenant définir les structures entières sur $\overline{X}_{Iw}^{an}$, c'est-à-dire les fonctions degré, et une norme pour l'espace des formes modulaires. Nous gardons les notations des parties précédentes.
Soit h_i l'entier tel que nh_i soit la hauteur de H_{i,a_i} ; on a donc $h_i = f_i a_i$ dans le cas 1 et $h_i = 2f_i a_i$ dans les cas 2 et 3. Soit $\mathcal{A}_{nd(a+b),h_i}$ l'espace de Siegel analogue à celui de la définition 3.2.1, mais en demandant que la hauteur de H soit égale à nh_i. On dispose d'un morphisme $\mathcal{P}_i : X_{Iw} \to \mathcal{A}_{nd(a+b),h_i} \times K$ par la formule $(A, \lambda, \iota, \eta, H_{j,k}) \to (A, \lambda, \eta, H_{i,a_i})$. De plus, il existe une compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i}$ de $\mathcal{A}_{nd(a+b),h_i}$, et quitte à restreindre les décompositions polyhédrales utilisées pour construire les compactifications toroïdales, ces morphismes s'étendent en $\mathcal{P}_i : \overline{X}_{Iw} \to \overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i} \times K$ par le théorème 3.1.3.
Soit $\overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i}^{rig}$ l'espace rigide associé à $\overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i} \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$, où O_K est l'anneau des entiers de K. Comme ce dernier schéma est propre, cet espace rigide est égal à l'espace analytique associé à $\overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i} \times K$. Les morphismes $\mathcal{P}_i$ induisent des morphismes $\overline{X}_{Iw}^{an} \to \overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i}^{rig}$. Rappelons que nous avons défini une fonction $\deg : \overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b),h_i}^{rig} \to [0, h_i]$.

Définition 3.5.10. On définit la fonction $\mathrm{Deg}_i : \overline{X}_{Iw}^{an} \to [0, f_i a_i]$ par la formule $x \to \deg \mathcal{P}_i(x)$ dans le cas 1 et $x \to \frac{1}{2} \deg \mathcal{P}_i(x)$ dans les cas 2 et 3. La fonction degré $\mathrm{Deg} : \overline{X}_{Iw}^{an} \to \prod_{i=1}^h [0, f_i a_i]$ est définie par $x \to (\mathrm{Deg}_i(x))_i$.

Remarque 3.5.11. Le fait de diviser par 2 le degré de H_{i,a_i} dans les cas 2 et 3 est justifié par le fait suivant. Supposons que A soit une variété abélienne avec bonne réduction sur O_L, avec L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Supposons pour simplifier que $B = F$, et que π_i est dans le cas 2. Alors le groupe H_{i,a_i} est un schéma en groupe fini et plat sur O_L, muni d'une action de $O_{F_i^{nr}}$ où F_i^{nr} est l'extension maximale non ramifiée contenue dans F_i. Soit $F_{0,i}$ la complétion de F_0 en π_i, et $F_{0,i}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée contenue dans

$F_{0,i}$. Par hypothèse, F_i^{nr} est une extension de degré 2 de $F_{0,i}^{nr}$. Soit S_0 (resp. S) l'ensemble des plongements de $F_{0,i}^{nr}$ (resp. F_i^{nr}) dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Nous avons défini dans la partie 1.1.5 les degrés partiels $\deg_s H_{i,a_i}$ pour tout $s \in S$. Le groupe H_{i,a_i} étant égal à son orthogonal dans $A[\pi_i]$, on a $H_{i,a_i} \simeq (A[\pi_i]/H_{i,a_i})^{D,c}$, où ^{D} signifie le dual de Cartier, et ^{c} que l'action de O_F est obtenue par conjugaison (cela résulte de la compatibilité entre l'action de O_F et l'involution de Rosati). Si s_0 est un élément de S_0, et si s et $\overline{s}$ sont les deux éléments de S au-dessus de s_0, alors la proposition 1.1.32 montre que

$$\deg_s H_{i,a_i} = \deg_{\overline{s}} H_{i,a_i}$$

La quantité pertinente pour étudier le sous-groupe H_{i,a_i} n'est donc pas son degré, mais la moitié de celui-ci.
Remarquons enfin que dans le cas 1, le groupe $H_{i,a_i}^{\perp}$, qui est un sous-groupe de $A[\pi_i^-]$ a pour degré $f_i(b_i - a_i)+$ deg H_{i,a_i}. Dans le cas où $a_i = b_i$, le groupe $H_{i,a_i} \oplus H_{i,a_i}^{\perp}$, qui est totalement isotrope, a pour degré 2 deg H_{i,a_i}.
Une autre justification pour cette définition est de considérer le cas $F_0 = \mathbb{Q}$ et $B = F$ est centrale (F est donc un corps quadratique imaginaire). On considère donc le groupe $GU(a,b)$. Le cas $a = b = 1$ correspond au cas de la courbe modulaire ; au niveau des espaces de modules, cela s'interprète par le fait que tout schéma abélien apparaissant dans la variété unitaire s'écrit comme $E \otimes_{\mathbb{Z}} O_F$, où E est une courbe elliptique. Or on sait que la quantité pertinente pour étudier la courbe modulaire de niveau Iwahorique en p est le degré du sous-groupe universel, qui est compris entre 0 et 1. Nous devons donc retrouver cette quantité pour la variété unitaire, ce qui justifie notre définition.

Si $I = \prod_{k=1}^h I_k$ est un produit d'intervalles, on note $\overline{X}_{Iw,I} = \mathrm{Deg}^{-1}(I)$. Le lieu ordinaire-multiplicatif $\overline{X}_{Iw}^{mult}$ correspond au lieu où tous les degrés sont maximaux, c'est à dire à $\overline{X}_{Iw,I}$ avec $I = \prod_{i=1}^h \{f_i a_i\}$. Par hypothèse, nous nous plaçons dans le cas où ce lieu est non vide.

Définition 3.5.12. L'espace des formes modulaires surconvergentes est défini par

$$H^0(\overline{X}_{Iw}^{an}, \omega^\kappa)^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa)$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ de $\overline{X}_{Iw}^{mult}$ dans $\overline{X}_{Iw}^{an}$.

Une forme modulaire surconvergente est donc définie sur un espace du type $\overline{X}_{Iw,I}$ avec $I = \prod_{i=1}^h [f_i a_i - \varepsilon, f_i a_i]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.
Nous avons des propriétés analogues quant au comportement des opérateurs de Hecke relativement à la fonction Degré.

Proposition 3.5.13. *Soit $1 \leq i \leq h$, $x \in \overline{X}_{Iw}^{an}$ et $y \in U_{\pi_i}(x)$. Soit $x_j = Deg_j(x)$, et $y_j = Deg_j(y)$ pour $1 \leq j \leq h$. Alors*
- *$y_j = x_j$ pour $j \neq i$.*
- *$y_i \geq x_i$*

De plus, s'il existe $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$ avec $Deg_i(y) = Deg_i(x)$, alors $x_i \in \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$ dans les cas 1 et 2, et $x_i \in \frac{1}{2e_i}\mathbb{Z}$ dans le cas 3.

Démonstration. Nous raisonnons comme dans la démonstration de la proposition 3.2.8. Le premier point est identique. Pour le deuxième point, supposons qu'il existe $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$ avec $Deg_i(y) = Deg_i(x)$. Soit A la variété semi-abélienne associée à x, définie sur une extension finie M de $\mathbb{Q}_p$. Le point y correspond à un sous-groupe L de $A[\pi_i^{2e_i}]$. De plus, quitte à élargir M, on peut supposer que A s'étend en un schéma semi-abélien A_0 sur O_M, et L en un sous-groupe quasi-fini et plat L_0 de $A_0[\pi_i^{2e_i}]$. En gardant les mêmes notations que la démonstration 3.2.8, on note $\widetilde{G}$ un schéma semi-abélien de rang torique constant tel que A_0 soit obtenu comme un quotient de $\widetilde{G}$ par la construction de Mumford (voir l'annexe). Le même raisonnement que pour la proposition 3.2.8 montre que $L_1 := L_0[\pi_i^{e_i}] \cap \widetilde{G}[p]$ est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1. On en déduit immédiatement que son degré est entier, et donc que $Deg_i(x) \in \frac{1}{2e_i}\mathbb{Z}$ avec notre définition de la fonction Deg_i. On veut montrer que $Deg_i(x) \in \frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$ dans les cas 1 et 2. On se ramène facilement au cas où $n = 1$. Étudions alors les deux cas possibles.
Dans le premier cas, on peut décomposer L_1 en $L_1 = L_1^+ \oplus L_1^-$, où $L_1^+ = L_1[(\pi_i^+)^{e_i}]$, et L_1^- est l'orthogonal de L_1^+. Le fait que L_1 soit un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 montre alors que les degrés de L_1^+ et L_1^- sont entiers, donc que $Deg_i(x)$ est un multiple de $1/e_i$.
Dans le cas 2, soit F_i^{nr} est l'extension maximale non ramifiée contenue dans F_i, et de même pour $F_{0,i}^{nr}$. Alors le sous-groupe L_1 est muni d'une action de $O_{F_i^{nr}}$, et on peut donc définir les degrés partiels de L_1 pour cette action. Si S est l'ensemble des plongements de F_i^{nr} dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, alors le degré de L_1 est la somme des degrés partiels $\deg_s L_1$, pour tout $s \in S$. Comme L_1 est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1, les degrés partiels sont tous entiers. De plus, si s_0 est un plongement de $F_{0,i}^{nr}$, s et $\overline{s}$ les deux éléments de S au-dessus de s_0, alors en raisonnant comme dans la remarque 3.5.11 on a par dualité

$$\deg_s L_1 = \deg_{\overline{s}} L_1$$

Le degré de L_1 est donc pair. Avec notre définition de la fonction degré, cela prouve que $Deg_i(x)$ appartient à $\frac{1}{e_i}\mathbb{Z}$. □

Remarque 3.5.14. La situation est plus compliquée dans le cas 3, ce qui explique la différence dans le résultat. Cela impliquera une borne moins forte dans le résultat de classicité. Néanmoins, une analyse plus détaillée de ce cas pourrait peut-être permettre d'obtenir un résultat équivalent aux cas 1 et 2.

Comme dans le cas précédent, on en déduit la proposition suivante. On note $e_i' = e_i$ dans les cas 1 et 2, et $e_i' = 2e_i$ dans le cas 3.

Proposition 3.5.15. *Soit* $1 \leq i \leq h$, *k un entier compris entre* 0 *et* $e_i' f_i a_i - 1$ *et* $0 < \alpha < \beta < 1$ *deux rationnels. Alors il existe un entier N tel que*

$$U_{\pi_i}^N \left(Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e_i'}, f_i a_i]) \right) \subset Deg_i^{-1}([\frac{k+\beta}{e_i'}, f_i a_i])$$

Nous allons maintenant définir une norme sur l'espace des formes modulaires. Rappelons que nous avons noté $\mathcal{A}_{nd(a+b)}$ le schéma sur $\mathbb{Z}_p$ paramétrant les variétés abéliennes de dimension $nd(a+b)$ munies d'une polarisation de degré premier à p avec une structure de niveau N, et $\overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$ une compactification toroïdale de ce schéma. On se donne une identification de Σ avec $\{1,\dots,d\}$. En particulier, on a des couples $(a_1,b_1),\dots,(a_d,b_d)$.

Définition 3.5.16. Soit $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$ l'espace de modules sur $\mathbb{Z}_p$ dont les S-points sont :
- un point $x \in \overline{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}(S)$.
- une filtration $0 = \omega_{A,0} \subset \omega_{A,1} \subset \cdots \subset \omega_{A,2nd} = \omega_A$ telle que pour tout $1 \leq i \leq nd$, $\omega_{A,2i-1}/\omega_{A,2i-2}$ et $\omega_{A,2i}/\omega_{A,2i-1}$ sont localement des $\mathcal{O}_S$-facteurs directs de ω_A de rangs respectifs a_i et b_i (a_i est égal à a_j est j est l'unique entier compris entre 1 et d et congru à i modulo d, et de même pour b_i).

L'espace $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$ est un schéma propre sur $\mathbb{Z}_p$. Soit

$$\mathcal{T}_i = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}}}(\omega_{A,2i-1}/\omega_{A,2i-2}, \mathcal{O}^{a_i}_{\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}}) \oplus \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}}}(\omega_{A,2i}/\omega_{A,2i-1}, \mathcal{O}^{b_i}_{\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}})$$

pour $1 \leq i \leq d$ (avec par convention $\omega_{A,0} = 0$). On note $\phi_i : \mathcal{T}_i \to \widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$ la projection. L'espace $\mathcal{T}_i$ est un torseur sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ pour le groupe $\mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i}$. Si $\kappa_i = (k_j, l_j)$ est un élément de $\mathbb{Z}^{a_i} \times \mathbb{Z}^{b_i}$, on note $\omega_i^{\kappa_i} = \phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}[-\kappa_i']$, où $\kappa_i' = (k_{a_i+1-j}, l_{b_i+1-j})$, et où $\phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}[-\kappa_i']$ est le sous-faisceau de $\phi_{i*}\mathcal{O}_{\mathcal{T}_i}$ où le tore de $\mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i}$ agit par $-\kappa_i'$, et où le radical unipotent agit trivialement.
Rappelons que nous avons défini le poids d'une forme modulaire comme des couples $(k_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq a_\sigma, \sigma \in \Sigma}$ et $(l_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq b_\sigma, \sigma \in \Sigma}$, où Σ est l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$, vérifiant $k_{1,\sigma} \geq \cdots \geq k_{a_\sigma,\sigma}$ et $l_{1,\sigma} \geq \cdots \geq l_{b_\sigma,\sigma}$, pour tout $\sigma \in \Sigma$. On note $\kappa_\sigma = ((k_{i,\sigma}),(l_{i,\sigma}))$; avec la numérotation faite sur Σ, on a donc des éléments κ_i de $\mathbb{Z}^{a_i} \times \mathbb{Z}^{b_i}$. On note alors ω_0^κ le faisceau défini sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{ndg}$ par $\omega_0^\kappa := \otimes_{i=1}^d \omega_i^{\kappa_i}$.
Soit $\widetilde{\mathcal{A}}^{rig}_{nd(a+b)}$ l'espace rigide associé à $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)} \times_{\mathbb{Z}_p} O_K$. Comme le schéma $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$ est propre, cet espace rigide est égal à $(\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)} \times_{\mathbb{Z}_p} K)^{an}$.

Nous allons maintenant définir un morphisme de $\overline{X}_{Iw}$ vers $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)} \times_{\mathbb{Z}_p} K$. Le faisceau ω_A universel sur $\overline{X}_{Iw}$ est muni d'une action de O_B, et se décompose en $\omega_A = \oplus_{i=1}^h \omega_{A,i}$, où $\omega_{A,i}$ est un $O_{B,i}$-module. rappelons que $O_{B,i}$ est égal à $\mathrm{M}_n(O_{F_{0,i}}) \oplus \mathrm{M}_n(O_{F_{0,i}})$ dans le cas 1 et à $\mathrm{M}_n(O_{F_i})$ dans les cas 2 et 3. Par équivalence de Morita, le faisceau $\omega_{A,i}$ est la somme de n copies de $\omega_{A,i,0}$, où $\omega_{A,i,0}$ est un faisceau localement libre de rang $e_i f_i(a+b)$ muni d'une action de $O_{F_{0,i}} \oplus O_{F_{0,i}}$ dans le cas 1, et de O_{F_i} dans les cas 2 et 3. De plus, on peut décomposer ce dernier faisceau suivant les éléments de Σ_i :

$$\omega_{A,i,0} = \oplus_{\sigma \in \Sigma_i}(\omega_{A,i,0,\sigma,1} \oplus \omega_{A,i,0,\sigma,2})$$

où $\omega_{A,i,0,\sigma,1}$ et $\omega_{A,i,0,\sigma,2}$ sont des faisceaux localement libres de rang a_σ et b_σ. On obtient de cette manière une filtration du faisceau ω_A.

Définition 3.5.17. On définit un morphisme $\psi : \overline{X}_{Iw} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)} \times_{\mathbb{Z}_p} K$ par la formule $x \to (\mathcal{P}(x), (\omega_{A,\bullet}))$, où $\mathcal{P}$ est le morphisme d'oubli de l'action de O_B et de la structure Iwahorique, et où la filtration $(\omega_{A,\bullet})$ de ω_A est déduite de ce qui précède.

On en déduit un morphisme $\psi : \overline{X}^{an}_{Iw} \to \widetilde{\mathcal{A}}^{rig}_{nd(a+b)}$. Au poids κ nous avons associé un faisceau ω_0^κ sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{nd(a+b)}$, à l'aide d'un choix de numérotation des places que l'on supposera compatible avec la filtration de ω_A construite précédemment. On a alors $\omega^\kappa = \psi^* \omega_0^\kappa$ comme faisceaux sur $\overline{X}_{Iw}$ et $\overline{X}^{an}_{Iw}$. Cela permet de disposer d'un modèle entier pour le faisceau ω^κ (sur $\overline{X}^{an}_{Iw}$), et d'une norme sur l'espace $H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa)$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\overline{X}^{an}_{Iw}$.

3.5.4 Classicité

Nous prouvons dans cette partie le théorème de classicité. Énonçons tout d'abord le théorème. Nous avons noté Σ l'ensemble des plongements de F_0 dans $\overline{\mathbb{Q}}$, Σ_i l'ensemble des plongements de $F_{0,i}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, de telle sorte que Σ soit l'union disjointe des Σ_i. Notons également $F_{0,i}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée contenue dans $F_{0,i}$, et S_i l'ensemble des plongements de $F_{0,i}^{nr}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Pour tout $s \in S_i$, on note Σ_s l'ensemble des éléments de Σ_i égaux à s en restriction à $F_{0,i}^{nr}$. Ainsi, Σ_i est égal à l'union disjointe des Σ_s pour $s \in S_i$.

Théorème 3.5.18. *Soit f une forme surconvergente de poids $\kappa = (k_\sigma, l_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, $k_\sigma = (k_{1,\sigma} \geq \dots \geq k_{a_\sigma,\sigma})$ et $l_\sigma = (l_{1,\sigma} \geq \dots \geq l_{b_\sigma,\sigma})$. On suppose que f est propre pour les opérateurs U_{π_i} de valeur propre α_i pour tout i entre 1 et h. Supposons que*

$$d_i a_i b_i + e_i v(\alpha_i) < \inf_{s\in S_i} \big(\inf_{\sigma\in\Sigma_s} k_{a_\sigma,\sigma} + \inf_{\sigma\in\Sigma_s} l_{b_\sigma,\sigma} \big)$$

dans les cas 1 et 2, et que

$$d_i a_i b_i + e_i v(\alpha_i) < \inf_{\sigma\in\Sigma_i} (k_{a_\sigma,\sigma}, l_{b_\sigma,\sigma})$$

dans le cas 3. Alors f est classique.

Dans le cas 2, la condition se réécrit donc

$$d_i \frac{(a+b)^2}{4} + e_i v(\alpha_i) < \inf_{s\in S_i} \big(\inf_{\sigma\in\Sigma_s} k_{a_\sigma,\sigma} + \inf_{\sigma\in\Sigma_s} l_{b_\sigma,\sigma} \big)$$

puisque $a_i = b_i = (a+b)/2$. Remarquons également que la condition du théorème dans les cas 1 et 2 est impliquée par la condition suivante, plus forte :

$$d_i a_i b_i + e_i v(\alpha_i) < \inf_{\sigma\in\Sigma_i} k_{a_\sigma,\sigma} + \inf_{\sigma\in\Sigma_i} l_{b_\sigma,\sigma}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit f une forme surconvergente vérifiant les hypothèses du théorème. Par définition, f est une section de ω^κ sur $\overline{X}_{Iw,J}$ avec $J = \prod_{i=1}^h [f_i a_i - \varepsilon, f_i a_i]$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Nous allons prolonger f à X^{an}_{Iw}.

la méthode est analogue à celle du cas des variétés de type C : on va prolonger f dans chaque direction, successivement.
Plus précisément, nous allons prolonger f à $\mathrm{Deg}^{-1}([0,f_1a_1]\times\cdots\times[f_ha_h-\varepsilon,f_ha_h])\cap X_{Iw}^{an}$ en utilisant le fait que f est propre pour U_{π_1} et la relation vérifiée par la valeur propre α_1. En répétant ce processus, on prolongera donc f à tout X_{Iw}^{an}.
Soit donc $\mathcal{U}_I:=\mathrm{Deg}^{-1}(I\times[f_2a_2-\varepsilon,f_2a_2]\times\cdots\times[f_ha_h-\varepsilon,f_ha_h])\cap X_{Iw}^{an}$, pour tout intervalle I de $[0,f_1a_1]$. La forme f est définie sur $\mathcal{U}_{[f_1a_1-\varepsilon,f_1a_1]}$. En utilisant la relation $f=\alpha_1^{-m}U_{\pi_1}^m f$ pour tout $m\geq 1$ et la proposition 3.5.15, on peut donc prolonger f à $\mathcal{U}_{]f_1a_1-1/e_1',f_1a_1]}$.
Soit $\mathcal{U}:=\mathcal{U}_{[0,f_1a_1-1/e_1'+\beta]}$, avec β un rationnel strictement positif, que l'on prendra arbitrairement petit. On peut décomposer les opérateurs de Hecke sur cet espace, et obtenir des opérateurs $U_{\pi_1,j}^{good}$ et $U_{\pi_1,j}^{bad}$. On peut alors former les séries de Kassaei attachées à cette décomposition. Le fait que ces séries se recolleront découle alors de la proposition suivante.

Proposition 3.5.19. *Soit T un opérateur égal à un certain $U_{\pi_1,j}^{bad}$. On suppose que l'image de cet opérateur est incluse dans $\mathcal{U}_{[0,f_1a_1-c]}$ pour un certain $c\geq 0$. Alors*

$$\|T\|_{\mathcal{U}}\leq p^{N_i-cM}$$

avec $M=\inf_{s\in S_1}(\inf_{\sigma\in\Sigma_s}k_{a_\sigma,\sigma}+\inf_{\sigma\in\Sigma_s}l_{b_\sigma,\sigma})$ dans les cas 1 et 2, et $M=2\inf_{\sigma\in\Sigma_1}(k_{a_\sigma,\sigma},l_{b_\sigma,\sigma})$ dans le cas 3.

Démonstration. En raisonnant comme dans la proposition 3.3.4, il suffit de majorer la norme du morphisme $\omega_{A/L}^\kappa\to\omega_A^\kappa$ pour un schéma semi-abélien A définie sur O_M (M est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$), et L un sous-groupe de $A[\pi_1]$ totalement isotrope maximal stable par O_B pouvant intervenir dans la définition de l'opérateur de Hecke. On se ramène au cas où $n=1$, A est un schéma abélien, et π_1 est la seule place au-dessus de p. On a un morphisme naturel $p:\omega_{A/L}\to\omega_A$. Distinguons maintenant les différents cas.
Dans le cas 1, la place π_1 est décomposée dans F. Le $O_M\otimes_{\mathbb{Z}}O_F$-module ω se décompose donc en $\omega_A=\omega_A^+\oplus\omega_A^-$, où ω_A^+ et ω_A^- sont des $O_M\otimes_{\mathbb{Z}_p}O_{F_{0,1}}$-modules. De même pour $\omega_{A/L}$. De plus, le module ω_A^+ se décompose en somme directe par les éléments de S_1 : $\omega_A^+=\oplus_{s\in S_1}\omega_{A,s}^+$. On obtient décomposition analogue pour $\omega_{A/L}^+$. Le morphisme p respecte cette filtration ; soit λ_s le déterminant du morphisme $\omega_{A/L,s}^+\to\omega_{A,s}^+$. La valuation de λ_s est égale au degré partiel $\deg_s L^+$, où $L^+=L[\pi_1^+]$. Si $\omega_A^{\kappa,+}$ désigne le module associé au poids $((k_{ij}),(0))$, et $p^{\kappa,+}:\omega_{A/L}^{\kappa,+}\to\omega_A^{\kappa,+}$ le morphisme induit alors on a

$$||p^{\kappa,+}||\leq p^{-\sum_{s\in S_1}(\deg_s L^+\inf_{\sigma\in\Sigma_s}k_{a_\sigma,\sigma})}$$

De même, par dualité, si on note $\omega_A^{\kappa,-}$ désigne le module associé au poids $((0),(l_{ij}))$, et $p^{\kappa,-}:\omega_{A/L}^{\kappa,-}\to\omega_A^{\kappa,-}$ le morphisme induit, on a

$$||p^{\kappa,-}||\leq p^{-\sum_{s\in S_1}(\deg_s L^-\inf_{\sigma\in\Sigma_s}l_{b_\sigma,\sigma})}$$

où $L^-=L[\pi_1^-]$. Or par dualité, les degrés partiels de L^+ et L^- son égaux. De plus, comme par hypothèse le degré de L est supérieur à $2c$, on a $\sum_{s\in S_1}\deg_s L^+\geq c$. On obtient que la norme du morphisme $p^\kappa : \omega^\kappa_{A/L} \to \omega^\kappa_A$ est majorée par

$$||p^\kappa|| \leq p^{-\sum_{s\in S_1} \deg_s L^+(\inf_{\sigma\in\Sigma_s} k_{a_\sigma,\sigma}+\inf_{\sigma\in\Sigma_s} l_{b_\sigma,\sigma})} \leq p^{-cM}$$

Dans le cas 2, soit $F_{0,1}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée contenue dans $F_{0,1}$, et de même pour F_1^{nr}. Soit S_1' l'ensemble des plongements de F_1^{nr} dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Le $O_M \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{F_1}$-module ω_A se décompose donc en somme directe suivant les éléments de S_1. On se ramène au cas où $S_{0,1}$ n'a qu'un seul élément, i.e. p est totalement ramifié dans $F_{0,1}$. On peut alors décomposer le module ω_A en $\omega_A^+ \oplus \omega_A^-$. La majoration est alors identique au calcul précédent.
Dans le cas 3, puisque le déterminant de $p : \omega_{A/L} \to \omega_A$ est de valuation au degré de L, qui est supérieur à $2c$, on obtient directement

$$||p^\kappa|| \leq p^{-2c\inf_{\sigma\in\Sigma_1}(k_{a_\sigma,\sigma},l_{b_\sigma,\sigma})}$$

□

Remarque 3.5.20. Les majorations de norme dans le cas 3 sont plus difficiles, mais nous pensons qu'il devrait être possible d'améliorer la borne obtenue dans ce cas 3 par celle (meilleure) obtenue dans les autres cas. Avec la remarque 3.5.14, cela permettrait d'améliorer la borne dans le résultat de classicité, et au final avoir un critère uniforme dans chacun des cas 1, 2 et 3.

Comme les opérateurs $U_{\pi_1,j}^{bad}$ sont à valeurs dans $\mathcal{U}_{[f_1a_1-(1/e_1-\beta),f_1a_1]}$, cela montre que si β est choisi suffisamment petit, les opérateurs $\alpha_1^{-1}U_{\pi_1,j}^{bad}$ sont tous de norme strictement inférieure à 1. Les séries définies se recolleront donc, et permettent d'étendre f à $\mathcal{U}_{[0,f_1a_1]}$. En itérant ce raisonnement, on prolonge f à X_{Iw}^{an}, c'est-à-dire un élément de $H^0(X_{Iw}^{an},\omega^\kappa)$. De plus, on démontre que cette fonction est bornée sur X_{Iw}^{an}. Le théorème d'extension 3.1.9 montre que f s'étend à la compactification, soit $f \in H^0(\overline{X}_{Iw}^{an},\omega^\kappa)$. Un principe GAGA (voir [EGA3] partie 5.1) montre alors que f est une forme modulaire algébrique, c'est-à-dire provient d'un élément de l'espace $H^0(\overline{X}_{Iw},\omega^\kappa)$.

3.6 Cas d'un niveau arbitraire en p

Nous montrons dans cette section que les résultats obtenus se généralisent à des variétés de Shimura avec des structures de niveau en p plus générales. Remarquons que, même dans le cas où p est non ramifié dans le corps F, on ne sait pas construire de bons modèles entiers pour les variétés. La situation est donc plus compliquée que le cas précédent, où le problème venait simplement de l'absence de modèle entier pour les compactifications.

3.6.1 Définitions

Soit $(F, F_0, B, \star)$ une donnée de Shimura de type (A) ou (C) comme définie précédemment, et $(U_{\mathbb{Q}}, \langle,\rangle)$ un B-module hermitien non dégénéré. Soient également un ordre O_B de B stable par $\star$, et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ tel que l'accouplement $\langle,\rangle$ restreint à $U \times U$ soit à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On supposera que les hypothèses faites dans le cas (A) ou (C) sur O_B et U sont vérifiées. Introduisons maintenant la variété de niveau plus général en p. On rappelle que X désigne la variété de Shimura sans niveau en p. Nous avons introduit un corps K suffisamment grand dans les cas (A) et (C), qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose que K contient suffisamment de racines p^r-ièmes de l'unité, de telle sorte que les caractères de (O_F/π_i^m) dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ sont à valeurs dans $K^\times$.

Définition 3.6.1. Soit $X_{0,m}$ l'espace de modules sur $\mathrm{Spec}(K)$ dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$ où

- $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$
- Dans le cas (C), pour tout $1 \leq i \leq h$, $0 \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,g}$ est un drapeau de $A[\pi_i^m]$, chaque $H_{i,j}$ étant totalement isotrope, stable par O_B et isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/\pi_i^m O_F)^{nj}$.
- Dans le cas (A) et si π_i est dans le cas 1, $0 \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,a+b}$ est un drapeau de $A[(\pi_i^+)^m]$, chaque $H_{i,j}$ étant stable par O_B et isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/(\pi_i^+)^m O_F)^{nj}$.
- Dans le cas (A) et si π_i est dans le cas 2 ou 3, $0 \subset H_{i,1} \subset \cdots \subset H_{i,(a+b)/2}$ est un drapeau de $A[\pi_i^m]$, chaque $H_{i,j}$ étant totalement isotrope, stable par O_B et isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/(\pi_i)^m O_F)^{nj}$.

Si A est un schéma abélien avec action de O_B, et si $\mathfrak{m}$ est un idéal de O_F, on dit qu'un point P est d'ordre exactement $\mathfrak{m}^N$ si $\mathfrak{m}^N \cdot P = 0$ et $\mathfrak{m}^{N-1} \cdot P \neq 0$.

Définition 3.6.2. Soit $X_{1,m}$ l'espace de modules sur $\mathrm{Spec}(K)$ dont les S-points sont les classes d'isomorphismes des $(A, \lambda, \iota, \eta, P_\bullet)$ où

- $(A, \lambda, \iota, \eta) \in X(S)$
- Dans le cas (C), pour tout $1 \leq i \leq h$, $P_{i,1}, \ldots, P_{i,g}$ sont des points de $A[\pi_i^m]$ d'ordre exactement π_i^m, orthogonaux entre eux, tels que le sous-groupe engendré par $P_{i,j}$ soit isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/\pi_i^m O_F)^n$.
- Dans le cas (A) et si π_i est dans le cas 1, $P_{i,1}, \ldots, P_{i,a+b}$ sont des points de $A[(\pi_i^+)^m]$ d'ordre exactement $(\pi_i^+)^m$, tels que le sous-groupe engendré par $P_{i,j}$ est isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/(\pi_i^+)^m O_F)^n$.
- Dans le cas (A) et si π_i est dans le cas 2 ou 3, $P_{i,1}, \ldots, P_{i,(a+b)/2}$ sont des points de $A[\pi_i^m]$ d'ordre exactement π_i^m, orthogonaux entre eux, tels que le sous-groupe engendré par $P_{i,j}$ soit isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/\pi_i^m O_F)^n$.

Remarque 3.6.3. Plaçons-nous dans le cas (C), et soit P un point de $A[\pi_i^m]$ d'ordre exactement π_i^m. La condition que le sous-groupe engendré par P est isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_F/\pi_i^m O_F)^n$ se reformule de la manière suivante. Le groupe $A[\pi_i^m]$ est muni d'une action de $M_n(O_F/\pi_i^m)$; soit $E_{j,k}$ la base traditionnelle de cet anneau comme (O_F/π_i^m)-module. La condition précédente est alors équivalente aux relations $E_{j,k} \cdot P = E_{j,l} \cdot P$ pour tout j, k, l. De même dans le cas (A).

On dispose d'une application naturelle $F : X_{1,m} \to X_{0,m}$. Dans le cas (C), F envoie $(A, \lambda, \iota, \eta, P_\bullet)$ sur $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$, où $H_{i,j}$ est le sous-groupe de $A[\pi_i^m]$ engendré par

$P_{i,1},\dots,P_{i,j}$, pour tout $1 \leq i \leq h$ et $1 \leq j \leq g$. L'application F est un revêtement étale de groupe $\mathcal{G} = \prod_{i=1}^h \mathcal{G}_i$, avec $\mathcal{G}_i = B_g(O_F/\pi_i^m)$, où B_g désigne le Borel supérieur de GL_g. De même dans le cas (A) : F est alors un revêtement étale de groupe $\mathcal{G} = \prod_{i=1}^h G_i$, où $\mathcal{G}_i = B_{a+b}(O_F/(\pi_i^+)^m)$ dans le cas 1, $\mathcal{G}_i = B_{(a+b)/2}(O_F/\pi_i^m)$ dans le cas 2 ou 3.
Soit χ un caractère du tore de $\mathcal{G}$ que l'on voit comme un caractère de $\mathcal{G}$; le faisceau $F_*\mathcal{O}_{X_{1,m}}$ est muni d'une action de $\mathcal{G}$, et on note $\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi) = F_*\mathcal{O}_{X_{1,m}}[\chi]$ le sous-faisceau où $\mathcal{G}$ agit par χ. C'est un faisceau inversible sur $X_{0,m}$.
Le faisceau des formes modulaires de poids κ et de nebentypus χ est le faisceau

$$\omega^\kappa(\chi) := \omega^\kappa \otimes_{\mathcal{O}_{X_{0,m}}} \mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi)$$

Soient $\overline{X}_{1,m}$ et $\overline{X}_{0,m}$ des compactifications toroïdales respectivement de $X_{1,m}$ et $X_{0,m}$. On suppose que les compactifications sont construites de telle sorte que le morphisme F s'étende en $F : \overline{X}_{1,m} \to \overline{X}_{0,m}$ (ce qui est possible d'après le théorème 3.1.3) ; le faisceau $\omega^\kappa(\chi)$ s'étend donc sur $\overline{X}_{0,m}$. L'espace des formes modulaires de poids κ et de nebentypus χ est donc l'espace $\mathrm{H}^0(\overline{X}_{0,m}, \omega^\kappa(\chi))$. On notera $\overline{X}_{1,m}^{an}$, $\overline{X}_{0,m}^{an}$, $X_{1,m}^{an}$ et $X_{0,m}^{an}$ les espaces analytiques associés respectivement à $\overline{X}_{1,m}$, $\overline{X}_{0,m}$, $X_{1,m}$ et $X_{0,m}$.

Définissons maintenant les opérateurs de Hecke U_{π_i}, pour $1 \leq i \leq h$. Soit C_i l'espace de modules sur K paramétrant un point $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$ de $X_{0,m}$, et un sous-groupe L, supplémentaire générique de $H_{i,D}[p]$ dans $A[\pi_i]$ avec D qui vaut g,a_i, ou $(a+b)/2$ suivant les cas (dans le cas (A) et π_i dans le cas 1, $L = L_0 \oplus L_0^\perp$, avec L_0 un supplémentaire de H_{i,a_i} dans $A[\pi_i^+]$). On dispose de deux applications $p_1, p_2 : C_i \to X_{0,m}$, où p_1 est l'oubli de L, et p_2 est le quotient par L (la polarisation sur le quotient est définie comme précédemment par la polarisation descendue $x_i \cdot \lambda$). Soit $\overline{C}_i$ une compactification toroïdale de C_i telle que les morphismes p_1 et p_2 s'étendent en des morphismes $\overline{C}_i \to \overline{X}_{0,m}$, et $\overline{C}_i^{an}$ l'espace analytique associé.

Définition 3.6.4. L'opérateur géométrique agissant sur les parties de $\overline{X}_{0,m}^{an}$ est défini par $U_{\pi_i}(S) = p_2(p_1^{-1}(S))$, pour toute partie S de $\overline{X}_{0,m}^{an}$.

Cet opérateur respecte les ouverts de $X_{0,m}^{an}$ (puisque les morphismes p_1 et p_2 sont finis étales sur $X_{0,m}^{an}$), mais pas ceux de $\overline{X}_{0,m}^{an}$ en général. Définissons maintenant l'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires avec nebentypus. Nous devons pour cela définir un morphisme $p_2^*\omega^\kappa(\chi) \to p_1^*\omega^\kappa(\chi)$. Nous avons déjà défini un morphisme $p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$ à l'aide de l'isogénie universelle $A \to A/L$ sur C_i. Nous allons donc définir un morphisme $p_2^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi) \to p_1^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi)$.
Soit $C_{i,1}$ l'espace de modules paramétrant un point $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L)$ de C_i et des points $P_\bullet$ de $A[p^\infty]$ comme dans la définition 3.6.2 tel que $F(A, \lambda, \iota, \eta, P_\bullet) = (A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$. Soit $C_{i,1}'$ l'espace de modules paramétrant un point $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L)$ de C_i et des points $P_\bullet'$ de $(A/L)[p^\infty]$ comme dans la définition 3.6.2 tel que $F(A/L, \lambda', \iota', \eta', P_\bullet') = (A/L, \lambda', \iota', \eta', H_\bullet')$. On dispose des morphismes de projection $q : C_{i,1} \to C_i$ et $q' : C_{i,1}' \to C_i$, qui consistent à oublier les points $P_\bullet$. Les morphismes q et q' sont des revêtements étales de groupe $\mathcal{G}_i$, et

on a $p_1^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi) = q_*\mathcal{O}_{C_{i,1}}(\chi)$ et $p_2^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi) = q'_*\mathcal{O}_{C'_{i,1}}(\chi)$.
De plus, on a un isomorphisme naturel $C_{i,1} \simeq C'_{i,1}$, défini par

$$(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L, P_\bullet) \to (A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet, L, P'_\bullet)$$

où les points $P'_\bullet$ sont les images des points $P_\bullet$ dans A/L. On en déduit donc un isomorphisme naturel entre $q_*\mathcal{O}_{C_{i,1}}(\chi)$ et $q'_*\mathcal{O}_{C'_{i,1}}(\chi)$, donc entre $p_1^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi)$ et $p_2^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi)$.
On a donc un morphisme $p^*(\kappa)(\chi) : p_2^*\omega^\kappa(\chi) \to p_1^*\omega^\kappa(\chi)$. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $X_{0,m}^{an}$, nous pouvons donc former le morphisme composé

$$\widetilde{U}_{\pi_i} : H^0(U_{\pi_i}(\mathcal{U}), \omega^\kappa(\chi)) \to H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_2^*\omega^\kappa(\chi)) \overset{p^*(\kappa)(\chi)}{\to} H^0(p_1^{-1}(\mathcal{U}), p_1^*\omega^\kappa(\chi)) \overset{Tr_{p_1}}{\to} H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa(\chi))$$

Définition 3.6.5. L'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires est alors défini par $U_{\pi_i} = \frac{1}{p^{N_i}}\widetilde{U}_{\pi_i}$ avec N_i le facteur de normalisation défini dans les parties précédentes.

3.6.2 Degré et normes

Nous allons maintenant définir la fonction degré sur $X_{0,m}^{an}$. Heureusement, nous allons utiliser la fonction degré que l'on a définie précédemment sur l'espace de niveau Iwahorique. Si $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$ est un point de $X_{0,m}$, on rappelle que $H_{i,j}$ est un sous-groupe de $A[\pi_i^m]$ dans le cas (C), et de $A[(\pi_i^+)^m]$ ou $A[\pi_i^m]$ dans le cas (A), suivant les cas. On note $H_i^{(m-1)}$ le sous-groupe de $A[p^\infty]$ égal à $H_{i,g}[\pi_i^{m-1}]$ dans le cas (C), à $H_{i,a_i}[(\pi_i^+)^{m-1}] \oplus H_{i,a_i}^\perp[(\pi_i^-)^{m-1}]$ dans le cas (A)-1, et à $H_{i,(a+b)/2}[\pi_i^{m-1}]$ dans les cas (A)-2 et (A)-3. On note alors $H^{(m-1)}$ le sous-groupe de $A[p^\infty]$ engendré par les $H_i^{(m-1)}$, pour tout i.
On définit alors un morphisme $G : X_{0,m} \to X_{Iw}$ par $(A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet) \to (A/H^{(m-1)}, \lambda', \iota', \eta', H'_\bullet)$, où $H'_{i,j}$ est l'image de $H_{i,j}$ dans $A/H^{(m-1)}$, sauf éventuellement dans le cas (A)-1, où $H'_{i,j}$ est égal à l'image de $H_{i,j} \cap (\pi_i^+)^{-1}H_i^{(m-1)}$ dans $A/H^{(m-1)}$ pour $j > a_i$. La polarisation λ' est définie comme la polarisation descendue $p^{m-1} \cdot \lambda$. On vérifie alors que $H'_{i,j}$ est un sous-groupe de $A[\pi_i]$ ou $A[\pi_i^+]$ suivant les cas, et que $(A/H^{(m-1)}, \lambda', \iota', \eta', H'_\bullet)$ définit bien un point de X_{Iw}. De plus, on peut supposer que les compactifications toroïdales sont construites de telle sorte que le morphisme G s'étende en $G : \overline{X}_{0,m} \to \overline{X}_{Iw}$. On notera encore G le morphisme analytifié $\overline{X}_{0,m}^{an} \to \overline{X}_{Iw}^{an}$.

Définition 3.6.6. On définit la fonction degré sur $\overline{X}_{0,m}^{an}$ par Deg: $\overline{X}_{0,m}^{an} \to \prod_{i=1}^h [0, f_i a_i]$, $x \to \mathrm{Deg}(G(x))$.

L'entier a_i est défini dans la partie 3.5.3 dans le cas (A), et on note $a_i = g$ dans le cas (C). On notera également Deg_i la i-ième composante de la fonction Deg. Pour démontrer les propriétés de la fonction Deg, nous allons nous ramener à l'espace X_{Iw}^{an} à l'aide de l'application G. Les opérateurs U_{π_i} ne commutent pas avec G, mais nous avons néanmoins la propriété suivante.

Proposition 3.6.7. *Soit $1 \leq i \leq h$, et $x \in X_{0,m}^{an}$. Alors $G(U_{\pi_i}(x)) \subset U_{\pi_i}(G(x))$.*

Démonstration. Pour simplifier les notations, plaçons-nous dans le cas (C). Soit $x = (A, \lambda, \iota, \eta, H_\bullet)$ le point de $X_{0,m}^{an}$ et L un sous-groupe totalement isotrope de $A[\pi_i]$, supplémentaire générique de $H_{i,g}$. Soit $y = (A/L, \lambda', \iota', \eta', H'_\bullet)$ le point de $U_{\pi_i}(x)$ correspondant à L. Le sous-groupe $H'_{i,j}$ est donc égal à $(H_{i,j} + L)/L$, pour tout $1 \leq j \leq g$. Le point $z = G(y) \in X_{Iw}^{an}$ est obtenu en quotientant la variété abélienne A/L par $H'^{(m-1)} = \oplus_{k=1}^h H_k'^{(m-1)}$, avec $H_k'^{(m-1)} = H'_{k,g}[\pi_k^{m-1}]$ pour tout k. Comme $H'^{(m-1)}$ est l'image de $H^{(m-1)}$ dans A/L, on a $z = (A/(L+H^{(m-1)}), \lambda'', \iota'', \eta'', H''_\bullet)$, avec $H''_{j,k}$ égal à l'image de $H_{j,k}$ dans $A/(L+H^{(m-1)})$. D'un autre côté, le point $G(x) \in X_{Iw}^{an}$ est égal à $(A/H^{(m-1)}, \lambda^0, \iota^0, \eta^0, H^0_\bullet)$, avec $H^0_{j,k}$ égal à l'image de $H_{j,k}$ dans $A/H^{(m-1)}$. En particulier, $H^0_{i,g} = H_{i,g}/H_{i,g}[\pi_i^{m-1}]$. Soit L_0 l'image de L dans $A/H^{(m-1)}$. On voit alors facilement que L est un supplémentaire générique de $H^0_{i,g}$: cela découle de l'égalité $(L + H_{i,g}[\pi_i^{m-1}]) \cap H_{i,g} = H_{i,g}[\pi_i^{m-1}]$. On a donc défini un point de $U_{\pi_i}(G(x))$. Or ce point est égal à z, donc on a bien $G(y) \in U_{\pi_i}(G(x))$.
La démonstration est analogue dans les autres cas. □

Cette proposition nous permet d'en déduire les propriétés de la fonction degré à partir de celles démontrées sur X_{Iw}^{an}.

Corollaire 3.6.8. *Soit $1 \leq i \leq h$, $x \in X_{0,m}^{an}$ et $y \in U_{\pi_i}(x)$. Soit $x_j = Deg_j(x)$, et $y_j = Deg_j(y)$ pour $1 \leq j \leq h$. Alors*
- *$y_j = x_j$ pour $j \neq i$.*
- *$y_i \geq x_i$*

De plus, s'il existe $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$ avec $Deg_i(y) = Deg_i(x)$, alors $x_i \in \frac{1}{e'_i}\mathbb{Z}$.
Soit k un entier compris entre 0 et $e'_i f_i a_i - 1$ et $0 < \alpha < \beta < 1$ deux rationnels. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Deg_i(y) \geq Deg_i(x) + \varepsilon$, pour tout $x \in Deg_i^{-1}([\frac{k+\alpha}{e'_i}, \frac{k+\beta}{e'_i}])$ et $y \in U_{\pi_i}^{2e_i}(x)$.

La fonction degré nous permet de définir les formes modulaires surconvergentes sur $X_{0,m}$. On définit le lieu ordinaire-multiplicatif comme $\overline{X}_{0,m}^{mult} := \mathrm{Deg}^{-1}(\{f_1 a_1\} \times \cdots \times \{f_h a_h\})$.

Définition 3.6.9. L'espace des formes modulaires surconvergentes est défini par

$$H^0(\overline{X}_{0,m}^{an}, \omega^\kappa(\chi))^\dagger := \mathrm{colim}_{\mathcal{V}} H^0(\mathcal{V}, \omega^\kappa(\chi))$$

où la colimite est prise sur les voisinages stricts $\mathcal{V}$ de $\overline{X}_{0,m}^{mult}$ dans $\overline{X}_{0,m}^{an}$.

Une forme modulaire surconvergente sur $X_{0,m}$ est donc définie sur un espace du type $\mathrm{Deg}^{-1}([f_1 a_1 - \varepsilon, f_1 a_1] \times \cdots \times [f_h a_h - \varepsilon, f_h a_h])$.

Remarque 3.6.10. Plaçons-nous sur le lieu de bonne réduction de $X_{0,m}^{an}$, et dans le cas (C) par exemple. On a donc un schéma abélien A définie sur O_L, l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Le sous-groupe $H_{i,g}$ de $A[\pi_i^m]$ est totalement isotrope, et est isomorphe localement pour la topologie étale à $(O_B/\pi_i^m O_B)^g$. Pour tout $1 \leq r \leq m-1$, on a un morphisme

$$H_{i,g}/H_{i,g}[\pi_i^{m-1}] \xrightarrow{\pi_i^r} H_{i,g}[\pi_i^{m-r}]/H_{i,g}[\pi_i^{m-r-1}]$$

qui est un isomorphisme en fibre générique. On en déduit par les propriétés de la fonction degré (voir [Fa]), que deg $H_{i,g}/H_{i,g}[\pi_i^{m-1}] \leq$ deg $H_{i,g}[\pi_i^{m-r}]/H_{i,g}[\pi_i^{m-r-1}]$ pour tout $1 \leq r \leq m-1$. On voit donc que si le degré de $H_{i,g}/H_{i,g}[\pi_i^{m-1}]$ est maximal, il en est de même de $H_{i,g}[\pi_i^{m-r}]/H_{i,g}[\pi_i^{m-r-1}]$ pour tout $1 \leq r \leq m-1$, et donc le degré de $H_{i,g}$ est maximal. Cela justifie notre définition du lieu ordinaire-multiplicatif et des formes modulaires surconvergentes.

Nous allons maintenant définir une norme sur l'espace $H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa(\chi))$, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\overline{X}_{0,m}^{an}$. Cela revient à trouver un modèle entier pour le faisceau $\omega^\kappa(\chi)$. Puisque nous avons déjà défini un modèle entier $\widetilde{\omega}^\kappa$ du faisceau ω^κ, il nous suffit de définir un modèle entier du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi)$. On rappelle que $\mathcal{O}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi) = F_* \mathcal{O}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}[\chi]$, où F est le morphisme $\overline{X}_{1,m}^{an} \to \overline{X}_{0,m}^{an}$. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}$ est canoniquement muni d'un modèle entier $\widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}$. On définit alors

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi) := F_* \widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}[\chi]$$

Le sous-faisceau $\widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi)$ définit donc un modèle entier pour le faisceau $\mathcal{O}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi)$. On définit

$$\widetilde{\omega}^\kappa(\chi) := \widetilde{\omega}^\kappa \otimes_{\widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{0,m}^{an}}} \widetilde{\mathcal{O}}_{\overline{X}_{1,m}^{an}}(\chi)$$

C'est un sous-faisceau de $\omega^\kappa(\chi)$, et cela nous permet de définir une norme sur $H^0(\mathcal{U}, \omega^\kappa(\chi))$, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\overline{X}_{0,m}^{an}$, et donc sur les opérateurs agissant sur ces espaces.

3.6.3 Classicité

Les méthodes développées dans les parties précédentes permettent de démontrer un théorème de classicité pour les formes modulaires surconvergentes dont le poids est grand devant la pente.

Théorème 3.6.11. *Soit f une forme modulaire surconvergente sur $X_{0,m}$, de poids κ et de nebentypus χ. On suppose que f est propre pour les opérateurs U_{π_i}, de valeurs propres α_i, et que le poids κ est grand devant les valuations des α_i au sens du théorème* 3.4.1 *dans le cas (C), et du théorème* 3.5.18 *dans le cas (A). Alors f est classique.*

La démonstration est entièrement analogue à celle des théorèmes précédents. La forme modulaire f est définie sur une partie de $\overline{X}_{0,m}^{an}$. On prolonge f à $X_{0,m}^{an}$: pour ce faire, on prolonge f dans chaque direction en utilisant le fait que f est propre pour U_{π_i}. On utilise tout d'abord le fait que f se prolonge automatiquement à certaine zone du type $\mathrm{Deg}_i > f_i a_i - 1/e'_i$. Ensuite, on décompose l'opérateur de Hecke sur U_{π_i} sur la zone restante, construit les séries de Kassaei, et recolle celles-ci pour prolonger f à la zone restante. On applique ensuite le principe d'extension (théorème 3.1.9) pour conclure que f est classique.
La seule proposition à prouver est le fait que les opérateurs $\alpha_i^{-1} U_{\pi_i}^{bad}$ définis sont bien de norme strictement inférieure à 1.

Proposition 3.6.12. *Soit T un opérateur égal à un certain $U_{\pi_i}^{bad}$. On suppose que l'image de cet opérateur est incluse dans $Deg_i^{-1}([0, f_i a_i - c])$ pour un certain $c \geq 0$. Alors la majoration de la norme de $U_{\pi_i}^{bad}$ obtenue dans la proposition* 3.3.4 *ou* 3.5.19 *reste valable.*

Démonstration. En raisonnant comme dans les propositions citées, il suffit de majorer la norme du morphisme

$$p^*(\kappa)(\chi) : p_2^*\omega^\kappa(\chi) \to p_1^*\omega^\kappa(\chi)$$

La norme du morphisme $p_2^*\omega^\kappa \to p_1^*\omega^\kappa$ a été majorée dans les propositions précédentes. Le morphisme $p_2^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi) \to p_1^*\mathcal{O}_{X_{1,m}}(\chi)$ étant un isomorphisme naturel, il est de norme égale à 1. Cela donne la majoration pour la norme de $p^*(\kappa)(\chi)$. □

3.7 Appendice

Nous rappelons dans cette section la définition et certaines propriétés des schémas semi-abéliens. On peut se référer à [F-C] pour plus de détails.

Définition 3.7.1. Soit S un schéma. Un schéma semi-abélien $G \to S$ est un schéma en groupes commutatif qui est lisse et séparé, et tel que pour tout point $s \in S$, la fibre G_s de G en s est l'extension d'un tore T_s par une variété abélienne A_s :

$$0 \to T_s \to G_s \to A_s \to 0$$

Nous avons un théorème de réduction semi-stable.

Théorème 3.7.2 ([F-C] Théorème I.2.6)**.** *Soit V un anneau de valuation, de corps de fraction K, et G_K une variété semi-abélienne sur K. Alors il existe une extension finie V' de V, de corps des fractions K', telle que $G_{K'} := G_K \otimes_K K'$ s'étende en un schéma semi-abélien sur V'.*

Nous avons également une propriété des extensions des morphismes. Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers O_L, et si G_1 et G_2 sont deux schémas semi-abéliens sur O_L, alors tout morphisme en fibre générique $G_1 \otimes_{O_L} L \to G_2 \otimes_{O_L} L$ s'étend de manière unique en un morphisme $G_1 \to G_2$.

Proposition 3.7.3 ([F-C] Proposition I.2.7)**.** *Soit S un schéma noethérien normal, et G_1, G_2 deux schémas semi-abéliens sur S. On suppose que sur un ouvert dense U de S il existe un morphisme $\phi_U : G_1 \times U \to G_2 \times U$. Alors ϕ_U s'étend de manière unique en un morphisme $\phi : G_1 \to G_2$.*

Soit S un schéma, et G un schéma semi-abélien sur S. Pour tout $s \in S$, on note $rg(s)$ le rang de la partie torique T_s.

Proposition 3.7.4 ([F-C] Remarque I.2.4 Corollaire I.2.11)**.** *La fonction $s \to rg(s)$ est semi-continue supérieurement. De plus, si cette fonction est localement constante, alors G est globalement extension d'un tore par un schéma abélien. En particulier, G est un tore (resp. un schéma abélien) si et seulement si pour tout $s \in S$, G_s est un tore (resp. une variété abélienne).*

Si G est un schéma semi-abélien sur O_L, et si on note $rg(\eta)$ et $rg(s)$ les rangs de la partie torique de G respectivement en fibre générique et en fibre spéciale, alors on a $rg(\eta) \leq rg(s)$.
De plus, la partie torique en fibre générique de G peut s'étendre en un tore.

Proposition 3.7.5 ([F-C] Proposition I.2.9). *Soit S un schéma noethérien normal, G un schéma semi-abélien sur S, et U un ouvert dense de S. Si H_U est un sous-groupe fermé de $G \times U$, qui est un tore sur U, alors l'adhérence de U dans G est un tore $H \to S$ contenu dans G.*

Mumford a établi une construction pour construire certains schémas semi-abéliens, dont la fibre générique est abélienne. Cela généralise la construction de la courbe de Tate. Si $\widetilde{G}$ est globalement extension d'un tore T par un schéma abélien A sur O_L, et si Y est un faisceau étale de groupes abéliens libres sur O_L de rang $rg(T)$ avec un morphisme $i : Y \times L \to \widetilde{G} \times L$ vérifiant certaines conditions (voir [F-C] chapitre III), alors Mumford a construit un schéma semi-abélien G, que l'on peut voir comme le quotient de $\widetilde{G}$ par Y. Cette construction est en fait une équivalence entre certaines catégories.

Théorème 3.7.6 ([F-C] Corollaire III.7.2). *Soit G un schéma semi-abélien sur O_L dont la fibre générique est abélienne. Alors il existe un schéma en groupes $\widetilde{G}$ sur O_L, globalement extension d'un tore T par un schéma abélien A, un faisceau étale Y de groupes abéliens libres de rang $rg(T)$, et un morphisme $i : Y \to \widetilde{G} \times L$, tel que G soit obtenu en quotientant $\widetilde{G}$ par Y via la construction de Mumford. De plus, si ω_G et $\omega_{\widetilde{G}}$ désignent les faisceaux conormaux de G et $\widetilde{G}$, alors on a un isomorphisme $\omega_G \simeq \omega_{\widetilde{G}}$.*

La construction de Mumford donne une description explicite des groupes de torsion des schémas semi-abéliens considérés.

Proposition 3.7.7 ([F-C] Corollaire III.5.11). *Soit $\widetilde{G}, Y$ et G comme précédemment. Alors, pour tout $n \geq 1$ on a une suite exacte pour tout $s \in Spec(O_L)$*

$$0 \to \widetilde{G}[n] \times \kappa(s) \to G[n] \times \kappa(s) \to \frac{1}{n} Y_s / Y_s \to 0$$

où $\kappa(s)$ est le corps résiduel en s et $Y_s = \{y \in Y, y \in \widetilde{G}(O_{L,s})\}$.

Ainsi, si H_n désigne l'adhérence schématique de $\widetilde{G}[n] \times L$ dans $G[n]$, alors H_n est isomorphe à $\widetilde{G}[n]$, et $G[n]/H_n$ est étale. Par exemple, si $\widetilde{G} = \mathbb{G}_m$, $Y = q^{\mathbb{Z}}$, alors G est la courbe de Tate, et H_n est isomorphe à μ_n pour tout n. La quantité $\frac{1}{n} Y_s / Y_s$ est dans ce cas isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si s est le point générique, et est nulle si s est le point spécial.
En résumé, supposons que l'on dispose d'un schéma G semi-abélien sur L. Alors, quitte à étendre le corps L, il s'étend en un schéma semi-abélien G_0 sur O_L. Soit T_0 le tore maximal contenu dans G_0, et $A_0 = G_0/T_0$; A_0 est un schéma semi-abélien dont la fibre générique est abélienne. Alors A_0 est obtenu par la construction de Mumford en quotientant un

schéma semi-abélien $\widetilde{G}$ par un réseau étale Y, où $\widetilde{G}$ est globalement extension d'un tore T_1 par un schéma abélien A_1. On a alors pour tout $n \geq 1$ une suite exacte

$$0 \to T_0[n] \to G_0[n] \to A_0[n] \to 0$$

De plus, on a une injection $0 \to \widetilde{G}[n] \to A_0[n]$, dont le quotient est étale, et une suite exacte

$$0 \to T_1[n] \to \widetilde{G}[n] \to A_1[n] \to 0$$

On peut donc filtrer le schéma en groupes $G_0[n]$, avec comme crans de filtration $T_0[n]$, $T_1[n]$, $A_1[n]$ et un schéma en groupes étale. Remarquons que les trois premiers schémas en groupes sont finis et plat sur O_L, alors que $G_0[n]$ n'est en général que quasi-fini et plat.

Conclusion

La méthode du prolongement analytique, initialement développée par Buzzard et Kassaei dans le cas de la courbe modulaire, possède donc de nombreuses généralisations. Nous avons dans un premier temps montré comment cette méthode permettait de prouver des théorèmes de classicité pour les formes modulaires surconvergentes sur des variétés de Shimura, dans le cas où le nombre premier p était non ramifié dans la donnée de Shimura. Les deux étapes dans le prolongement analytique sont la détermination du zone de prolongement automatique, et ensuite la construction de séries à l'aide de la décomposition des opérateurs de Hecke sur certaines zones. Si le poids est suffisamment grand devant la pente, ces séries convergeront, et un principe de Koecher permet de conclure que la forme est classique.
Dans le cas où le nombre premier p est ramifié, la démonstration du prolongement à la variété rigide reste valable, mais on ne dispose pas du principe de Koecher, et donc on ne peut conclure directement que la forme étendue est classique. Dans le cas des variétés de Hilbert, il est possible de construire des modèles entiers des compactifications toroïdales de niveau Iwahorique, ainsi qu'un principe de Koecher, ce qui conclue le théorème de classicité. Dans le cas général, plutôt que d'essayer d'adapter les méthodes de construction des modèles entiers des compactifications toroïdales, nous utilisons un plongement dans une variété de Siegel, ce qui permet de définir des structures entières sur l'espace analytique associé à la variété de Shimura rationnelle. Cela permet en particulier de définir facilement le degré ses sous-groupes, et une norme sur l'espace des formes modulaires. La méthode du prolongement analytique étant très générale, elle permet d'étendre la forme surconvergente à l'espace analytique associé à la variété de Shimura rationnelle, et permet donc de prouver le théorème de classicité.

Bibliographie

[AIP] F. ANDREATTA, A. IOVITA et V. PILLONI, *On overconvergent Hilbert modular cusp forms*, prépublication. (2014).

[AIP2] F. ANDREATTA, A. IOVITA et V. PILLONI, *p-adic families of Siegel modular cuspforms*, prépublication. À paraître dans Annals of Math. (2014).

[AM] A. Abbes et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **99** (2004).

[Be] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie à support propre*, Première partie, prépublication (1996), disponible sur perso.univ-rennes1/pierre.berthelot.

[Ba] W. BARTENWERFER, *Die erste "metrische" Kohomologiegruppe glatter affinoider Räume*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 40 (1978), 1, 1-14.

[Bo] S. BOSCH, *Lectures on formal and rigid geometry*, Prépublication 378 du SFB Geometrische Strukturen in der Mathematik, Münster (2005).

[Bo2] S. BOSCH, *Half a century of rigid analytic spaces*, Pure Appl. Math. Q., 5(4) : 1435-1467 (2009).

[BL1] S. Bosch et W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, I. Rigid spaces*, Math. Ann. 295, 291-317 (1993).

[BL2] S. Bosch et W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry, II. Flattening techniques*, Math. Ann. 296, 403-429 (1993).

[Br] R. BRASCA, *Eigenvarieties for cuspforms over PEL type Shimura varieties with dense ordinary locus*, prépublication (2014).

[Bu] K. BUZZARD, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Amer. Math. Soc. 16 (2002).

[Co] R. COLEMAN, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. 124 (1996).

[CM] R. COLEMAN et B. MAZUR, *The eigencurve*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham 1996), London Math. Soc. Lecture note series 254, Cambridge Univ. Press (1998), 1-113.

[D-P] P. DELIGNE et G. PAPPAS, *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*, Compos. Maths. 90 (1994), 59-79.

[Di] M. DIMITROV , *Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, Geometric Aspects of Dwork Theory (2004), 525-551.

[F-C] G. FALTINGS et C. L. CHAI, *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 22, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[Fa] L. FARGUES, *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. 645 (2010).

[EGA3] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique III. étude cohomologique des faisceaux cohérents*, tome 1, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **11** (1961).

[EGA4-3] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, tome 3, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **28** (1966).

[EGA4-4] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, tome 4, Publ. Math. Inst. Hautes études Sci. **32** (1967).

[Ha] M. HARRIS, *Functorial properties of toroïdal compactifications of locally symmetric varieties*, Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), 1-22.

[Jo] C. JOHANSSON, *Classicality for small slope overconvergent automorphic forms on some compact PEL Shimura varieties of type (C)*, prépublication (2012).

[Ka] P.L. KASSAEI, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. J. 132 (2006), 509-529.

[Ki] M. KISIN, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Annals of Math. 170 (3) (2009), 1085-1180.

[Ko] R. KOTTWITZ, *Points on Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992).

[La] K.-W. LAN, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, thèse de doctorat, université d'Harvard (2008).

[La2] K.-W. LAN, *Higher Koecher's principle*, prépublication (2014).

[Lü] W. LÜTKEBOHMERT, *Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Math. Z. 139 (1974) 69-84.

[Pi] V. PILLONI, *Prolongements analytiques sur les variétés de Siegel*, Duke Math. J. 157 (2011), 167-222.

[Pi2] V. PILLONI, *Formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids* 1, prépublication (2011).

[P-S 1] V. PILLONI et B. STROH, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication (2011).

[P-S 2] V. PILLONI et B. STROH, *Surconvergence et classicité : le cas déployé*, prépublication (2011).

[P-S 3] V. PILLONI et B. STROH, *Surconvergence, ramification et modularité*, prépublication (2013).

[Pin] R. PINK, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse de doctorat, Université de Bonn (1989).

[Ra] M. RAPOPORT, *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compos. Maths. 36 (1978), 255-335.

[Ray] M. RAYNAUD, *Schémas en groupes de type* $(p, p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. de France 102 (1974), 241-280.

[Sa] S. SASAKI, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms in the totally split case*, Compositio Mathematica, 146 (2010), pp541-560.

[Sa2] S. SASAKI, *Integral models of Hilbert modular varieties in the ramified case, deformations of modular Galois representations, and weight one forms*, prépublication (2014).

[St] B. STROH, *Compactifications des variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. France 138 (2010).

[T-O] J. TATE et F. OORT, *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4ème série tome 3 (1970), 1-21.

[Ti] Y. TIAN, *Clasicality of certain overconvergent p-adic Hilbert modular forms*, prépublication (2011).

[T-X] Y. TIAN et L. XIAO, *p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms*, prépublication (2012).

[We] T. WEDHORN, *Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL-type*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 32 (1999), 575-618.

Résumé :

Nous nous intéressons aux formes modulaires surconvergentes définies sur certaines variétés de Shimura, et prouvons des théorèmes de classicité en grand poids. Dans un premier temps, nous étudions les variétés ayant bonne réduction, associées à des groupes non ramifiés en p. Nous nous intéressons aux variétés de Shimura PEL de type (A) et (C), qui sont associées respectivement à des groupes unitaires et symplectiques. Pour démontrer un théorème de classicité, nous utilisons la méthode du prolongement analytique, qui a été développée par Buzzard et Kassaei dans le cas de la courbe modulaire.
Nous généralisons ensuite ce résultat de classicité à des variétés en ne supposant plus que le groupe associé est non ramifié en p. Dans le cas des formes modulaires de Hilbert, nous construisons des modèles entiers des compactifications de la variété, et démontrons un principe de Koecher. Pour des variétés de Shimura plus générales, nous travaillons avec le modèle rationnel de la variété, et utilisons un plongement vers une variété de Siegel pour définir les structures entières.

Title : Classicality of overconvergent modular forms on a Shimura variety

Abstract :

We deal with overconvergent modular forms défined on some Shimura varieties, and prove classicality results in the case of big weight. First we study the case of varieties with good reduction, associated to unramified groups in p. We deal with Shimura varieties of PEL type (A) and (C), which are associated respectively to unitary and symplectic groups. To prove a classicality theorem, we use the analytic continuation method, which has been developed by Buzzard and Kassaei in the case of the modular curve.
We then generalize this classicality result for varieties without assuming that the associated group is unramified in p. In the case of Hilbert modular forms, we construct integral models of compactifications of the variety, and prove a Koecher principle. For more general Shimura varieties, we work with the rationnal model of the variety, and use an embedding to a Siegel variety to define the integral structures.

Discipline : Mathématiques

Mots-clefs : formes modulaires surconvergentes, variétés de Shimura, opérateurs de Hecke

---

Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité,
LAGA, Institut Galilée,
99 avenue J-B Clément,
93430 Villetaneuse,
France.